Correction des exercices du cours de Probabilités

Exercice n°2.1 :

► On veut montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *p.s* vers 0, *i.e*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{|Y_n| > \epsilon\}) = 0$$

On fixe > 0 et on pose $A_n = \{|Y_n| > \epsilon\}$, par l'inégalité de Markov (ordre 2), on a

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon) \leq \epsilon^{-2}\mathbb{E}[Y_n^2]$$

Comme par hypothèse $\sum_n Y_n^2 < \infty$, on déduit

$$\sum_n P(A_n) < \infty$$

Par le lemme de Borel Cantelli, on peut alors affirmer que

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{|Y_n| > \epsilon\}) = 0$$

Exercice n°2.2 :

► Soit Y une variable positive ou nulle, on a $Y = Y \times 1_{Y>0}$, l'inégalité de Cauchy Schwartz donne

$$\mathbb{E}[|Y|]^2 \leq \mathbb{E}[Y^2] \times \mathbb{E}[1_{Y>0}], \qquad i.e \qquad \mathbb{E}[Y]^2 \leq \mathbb{E}[Y^2] \times \mathbb{P}(Y > 0)$$

► Soient A_1,...,A_n des évènements non tous négligeables, on pose

$$Y = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}, \quad \text{alors} \quad Y \geq 0 \quad \text{et} \quad Y^2 = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} 1_{A_i\cap A_j}$$

En appliquant l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\mathbb{P}(Y > 0) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) \geq \left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbb{P}(A_i\cap A_j)\right)^{-1}$$

► On cherche maintenant à montrer le deuxième lemme de Borel Cantelli quand on ne suppose les évènements que 2 à 2 indépendants. On commence comme dans la preuve du cours :

$$1 - \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1 - \mathbb{P}(\cap_n \cup_{m\geq n} A_m) = \mathbb{P}(\cup_n \cap_{m\geq n} A_m) = \lim_n \uparrow [1 - \mathbb{P}(\cup_{m\geq n} A_m)]$$

On applique maintenant l'inégalité que l'on a obtenue à la question précédente (entre n et k...)

$$\mathbb{P}(\cup_{n\leq m\leq k} A_m) \geq \left(\sum_{n\leq m\leq k}\mathbb{P}(A_m)\right)^2 \left(\sum_{n\leq m\leq k}\mathbb{P}(A_m) + 2\sum_{n\leq i<j\leq k}\mathbb{P}(A_i\cap A_j)\right)^{-1}$$

Maintenant, on utilise le fait que les évènements sont 2 à 2 indépendants :

$$2 \sum_{n \leq i < j \leq k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 2 \sum_{n \leq i < j \leq k} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) = \left(\sum_{n \leq m \leq k} \mathbb{P}(A_m) \right)^2 - \sum_{n \leq m \leq k} \mathbb{P}(A_m)^2$$

Notons $x_n^k = \sum_{n \leq m \leq k} \mathbb{P}(A_m)$, la dernière inégalité se réécrit :

$$\mathbb{P}(\cup_{n \leq m \leq k} A_m) \geq (x_n^k)^2 \left((x_n^k)^2 + x_n^k - \sum_{m \geq n} \mathbb{P}(A_m)^2 \right)^{-1}$$

Or on a $\quad 0 \leq \sum_{n \leq m \leq k} \mathbb{P}(A_m)^2 \leq x_n^k$ donc

$$\mathbb{P}(\cup_{n \leq m \leq k} A_m) \geq \frac{(x_n^k)^2}{(x_n^k)^2 + x_n^k}$$

Comme par hypothèse $\lim_{k \to \infty} x_n^k = +\infty$, on conclut alors que

$$1 - \mathbb{P}(\limsup_{n \to \infty} A_n) = \lim_n \uparrow [1 - \mathbb{P}(\cup_{m \geq n} A_m)] = 0$$