Analyse I

Série 10

1. Calculer
$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)^2}\,dx$$
en utilisant une décomposition en fractions partielles.
2. Calculer
$$\int \frac{dx}{\sin x}$$
a) par la substitution “pythagorienne” (ou “babylonienne”) ;
b) multiplier dénominateur et numérateur par $\sin x$.
3. Montrer que chaque intégrale du type
$$\int R\big(\cos^2 x, \sin^2 x, \tan x\big)\,dx\ ,$$
où R est une fonction rationnelle de trois variables, devient par la substitution
$$\tan x = u\ , \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}\ , \qquad \sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}$$
une intégrale d'une fonction rationnelle. Appliquer cette méthode à l'intégrale
$$\int \frac{dx}{3-\sin^2 x}\ .$$
4. Trouver une substitution par laquelle l'intégrale
$$\int R\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{ex+f}}, x\right) dx$$
devient une intégrale d'une fonction rationnelle.
5. Calculer l'intégrale
$$\int \sqrt{x^2+6x+8}\,dx\ .$$
6. (Joh. Bernoulli 1697). Montrer que
$$\int_0^1 x^x\,dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \dots$$
Indication. Utiliser la série pour e^u dans $x^x = e^{x\ln x}$ et calculer $\int x^n(\ln x)^n\,dx$ par intégration par parties.

Examens : un écrit sur les exercices, un oral sur le cours. Note finale = moyenne des deux examens avec la même pondération.