Mouvement brownien et variétés lorentziennes

Le cas des espaces de type Robertson-Walker

Jürgen Angst

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur, Strasbourg

Journées de Probabilités
Septembre 2008, Lille

1. Construction de la diffusion, le cadre géométrique
   - La diffusion relativiste de Dudley
   - La diffusion de Franchi et Le Jan
   - Les espaces de type Robertson-Walker

2. La diffusion de FLJ dans les espaces RW
   - Trouver des sous-diffusions
   - Comportement asymptotique de la diffusion

La diffusion de Dudley

Espace de Minkowski et espace hyperbolique

Soit $\mathbb{R}^{1,d} := \{\xi = (\xi^0, \xi^i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d\}$ l'espace de Minkowski de la relativité restreinte, muni de la pseudo-métrique :

$$\langle \xi, \xi \rangle := |\xi^0|^2 - \sum_{i=1}^{d} |\xi^i|^2,$$

et

$$\mathbb{H}^d := \{\xi \in \mathbb{R}^{1,d} \,|\, \xi^0 > 0 \text{ et } \langle \xi, \xi \rangle = 1\}.$$

Si $(e_0, e_1, \ldots, e_d)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{1,d}$, (e_j^*) sa base duale, les matrices $E_j = e_0 \otimes e_j^* + e_j \otimes e_0^*$ engendrent les rotations hyperboliques.

La diffusion relativiste de Dudley

Soient $\dot{\xi}_s$ un mouvement brownien hyperbolique sur $\mathbb{H}^d$ et

$$\xi_s := \xi_0 + \int_0^s \dot{\xi}_u du.$$

Alors $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ est une diffusion sur $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$.

Sa loi est invariante sous l'action du groupe de Lorentz.

La diffusion relativiste de Dudley

Si $\xi_s = (\xi_s^0, \overrightarrow{\xi_s})$, et si $s(t)$ est tel que $\xi_{s(t)}^0 = t$, alors la trajectoire euclidienne

$$Z_t := \overrightarrow{\xi_{s(t)}}$$

vérifie

$$\left| \frac{dZ(t)}{dt} \right| < 1.$$

La vélocité de $Z(t)$ a une norme < 1 (la vélocité de la lumière).

La diffusion relativiste de Franchi et Le Jan

Le cadre général

$$\begin{array}{cl} G(\mathcal{M}) & \text{fibré des repères pseudo-orthonormés dont le premier élément vit dans } T^1\mathcal{M} \\ \big\downarrow \pi_1 & \\ T^1\mathcal{M} & \text{partie positive du fibré tangent unitaire} \\ \big\downarrow & \\ \mathcal{M} & \text{variété lorentzienne orientée de dimension } d+1, \text{ munie de sa connexion de Levi-Civita} \end{array}$$

Le générateur infinitésimal de la diffusion

Soient V_j le champ de vecteur vertical canoniquement associé à la matrice E_j et H_0 le premier champ de vecteur horizontal. On définit

$$\mathcal{L} := H_0 + \frac{\sigma^2}{2}\mathcal{V}, \quad \text{où} \quad \mathcal{V} := \sum_{j=1}^{d} V_j^2.$$

Si $\mathcal{L}_0$ est le générateur infinitésimal du flot géodésique sur $T^1\mathcal{M}$ et $\Delta_{\mathcal{V}}$ le laplacien vertical, $\forall\, F \in C^2(T^1\mathcal{M})$, on a sur $G(\mathcal{M})$:

$$(\mathcal{L}_0 F) \circ \pi_1 \;=\; H_0(F \circ \pi_1)\;, \quad (\Delta_{\mathcal{V}} F) \circ \pi_1 \;=\; \mathcal{V}(F \circ \pi_1)\;.$$

Autrement dit, sur $T^1\mathcal{M}$, l'opérateur $\mathcal{L}$ induit l'opérateur :

$$\mathcal{G} := \mathcal{L}_0 + \frac{\sigma^2}{2}\Delta_{\mathcal{V}}.$$

Théorème (Franchi and Le Jan)

• *L'équation différentielle stochastique*

$$(*) \qquad d\Psi_s = H_0(\Psi_s)\, ds + \sigma \sum_{j=1}^{d} V_j(\Psi_s) \circ dw_s^j$$

définit une diffusion $(\xi_s, \dot{\xi}_s) := \pi_1(\Psi_s)$ *sur* $T^1\mathcal{M}$, *dont le générateur infinitésimal est* $\mathcal{G} = \mathcal{L}_0 + \frac{\sigma^2}{2} \Delta_{\mathcal{V}}$.

• *Si* $\overleftarrow{\xi}(s) : T_{\xi_s}\mathcal{M} \to T_{\xi_0}\mathcal{M}$ *désigne le transport parallèle inverse le long des courbes* C^1 $(\xi_{s'} \,|\, 0 \leq s' \leq s)$, *alors* $\zeta_s := \overleftarrow{\xi}(s)\, \dot{\xi}_s$ *est un mouvement brownien hyperbolique sur* $T_{\xi_0}\mathcal{M}$ *.*

Les espaces de type Robertson-Walker

Les espaces de type Robertson-Walker

Ce sont les variétés lorentziennes $\mathcal{M}$ du type :

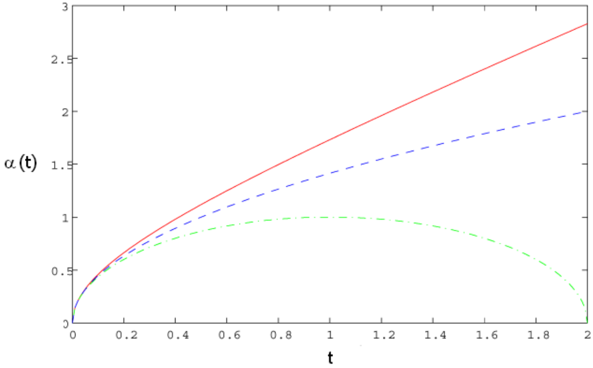
$\mathcal{M} = I \times M,$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $M = \mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3,$ ou $\mathbb{H}^3,$

munie de la pseudo-métrique :

$$ds^2 = dt^2 - \alpha^2(t) d\ell^2. \tag{1}$$

où $d\ell^2$ est la métrique riemannienne standard sur M.

Exemples de facteur d'expansion α



On considère la carte $\xi^\mu = (t,\ r,\ \theta)$ sur $\mathcal{M}$:

$$\begin{cases} t \in]0, T[, \quad \text{avec} \quad 0 < T \leq +\infty, \\ \\ r \in [0,1] \quad \text{si} \quad k = 1 \quad \text{et} \quad r \in \mathbb{R}^+ \quad \text{si} \quad k = -1 \text{ ou } k = 0, \\ \\ \theta = \begin{pmatrix} \sin(\phi)\cos(\psi) \\ \sin(\phi)\sin(\psi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^2,\ \phi \in [0,\pi], \quad \psi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dans cette carte, la pseudo-métrique (1) s'écrit :

$$ds^2 = dt^2 - \alpha^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\phi^2 + r^2\sin^2(\phi)d\psi^2\right). \tag{2}$$

Comportement asymp. des géodésiques de lumière

Soit $(\xi_u, \dot{\xi}_u)$ une géodésique de lumière dans $\mathcal{M}$, $i.e.$ une géodésique telle que $\langle \dot{\xi}_u, \dot{\xi}_u \rangle_{\xi_u} = 0$. On pose $\tau := \sup\{u,\ t_u \leq T\}$.

Proposition

Lorsque u tend vers τ, on a les comportements asymp. suivants :

- *Si $\int^T dv/\alpha(v) < +\infty$:*

$$r_u \to r_\infty \in \mathbb{R}_+^*, \quad \theta_u \to \theta_\infty \in \mathbb{S}^2.$$

- *Si $\int^T dv/\alpha(v) = +\infty$:*

$$r_u \to +\infty \ \text{ et } \ \theta_u \to \theta_\infty \in \mathbb{S}^2 \ \text{ si } \ k = 0 \ \text{ ou } \ -1,$$

$$r_u \to 1 \ \text{ et } \ \theta_u \ \text{ diverge si } \ k = 1.$$

La diffusion de Franchi et Le Jan dans les espaces RW

Rappel...

Théorème (Franchi and Le Jan)

- *L'équation différentielle stochastique*

$$(*) \qquad d\Psi_s = H_0(\Psi_s)\, ds + \sigma \sum_{j=1}^{d} V_j(\Psi_s) \circ dw_s^j$$

définit une diffusion $(\xi_s, \dot{\xi}_s) := \pi_1(\Psi_s)$ *sur* $T^1\mathcal{M}$, *dont le générateur infinitésimal est* $\mathcal{G} = \mathcal{L}_0 + \frac{\sigma^2}{2}\Delta_{\mathcal{V}}$.

- *Si* $\overleftarrow{\xi}(s) : T_{\xi_s}\mathcal{M} \to T_{\xi_0}\mathcal{M}$ *désigne le transport parallèle inverse le long des courbes* C^1 $(\xi_{s'} \,|\, 0 \leq s' \leq s)$, *alors* $\zeta_s := \overleftarrow{\xi}(s)\, \dot{\xi}_s$ *est un mouvement brownien hyperbolique sur* $T_{\xi_0}\mathcal{M}$ *.*

En coordonnées, cela donne...

Si Ψ_s est solution de $(*)$ et $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = \pi_1(\Psi_s) \in T^1\mathcal{M}$, alors :

$$
\begin{cases}
dt_s = \dot{t}_s ds, \quad dr_s = \dot{r}_s ds, \quad d\phi_s = \dot{\phi}_s ds, \quad d\psi_s = \dot{\psi}_s ds \\[2ex]
d\dot{t}_s = \left[-\alpha(t_s)\, \alpha'(t_s) \left(\dfrac{\dot{r}_s^2}{1 - k r_s^2} + r_s^2 |\dot{\theta}_s|^2 \right) + \dfrac{3\sigma^2}{2} \dot{t}_s \right] ds + dM_s^{\dot{t}}, \\[2ex]
d\dot{r}_s = \left[-2 \dfrac{\alpha'(t_s)\dot{t}_s}{\alpha(t_s)} \dot{r}_s - \dfrac{k r_s \dot{r}_s^2}{1 - k r_s^2} + r_s(1 - k r_s^2)|\dot{\theta}_s|^2 + \dfrac{3\sigma^2}{2} \dot{r}_s \right] ds + dM_s^{\dot{r}}, \\[2ex]
d\dot{\phi}_s = \left[-2 \left(\dfrac{\alpha'(t_s)\dot{t}_s}{\alpha(t_s)} + \dfrac{\dot{r}_s}{r_s} \right) \dot{\phi}_s + \sin(\phi_s)\cos(\phi_s) \dot{\psi}_s^{\,2} + \dfrac{3\sigma^2}{2} \dot{\phi}_s \right] ds + dM_s^{\dot{\phi}}, \\[2ex]
d\dot{\psi}_s = \left[-2 \left(\dfrac{\alpha'(t_s)\dot{t}_s}{\alpha(t_s)} + \dfrac{\dot{r}_s}{r_s} \right) \dot{\psi}_s - 2\cot(\phi_s)\dot{\phi}_s \dot{\psi}_s + \dfrac{3\sigma^2}{2} \dot{\psi}_s \right] ds + dM_s^{\dot{\psi}}.
\end{cases}
$$

Une première sous-diffusion naturelle

La diffusion de dimension deux $(t_s, \dot{t}_s)$ vérifie :

$$\begin{cases} dt_s = \dot{t}_s ds, \\ \\ d\dot{t}_s = \left[-H(t_s) \left(\dot{t}_s^2 - 1 \right) + \dfrac{3\sigma^2}{2} \dot{t}_s \right] ds + dM_s^{\dot{t}}, \end{cases}$$

où $H := \alpha'/\alpha$ est la fonction de Hubble.

Une autre sous-diffusion

Si on pose

$$a_s := \alpha(t_s)\sqrt{\dot{t}_s^2 - 1}, \quad b_s := \alpha^2(t_s) r_s^2 |\dot{\theta}_s|, \quad c_s := \frac{\alpha^2(t_s)\dot{r}_s}{\sqrt{1 - k r_s^2}},$$

alors la diffusion $(t_s, r_s, a_s, b_s, c_s)$ vérifie $a_s^2 = b_s^2 / r_s^2 + c_s^2$ et

$$\begin{cases} dt_s = \sqrt{1 + a_s^2/\alpha^2(t_s)}ds, \quad db_s = \dfrac{3\sigma^2}{2} b_s ds + \dfrac{\sigma^2 \alpha^2(t_s) r_s^2}{2 b_s} ds + dM_s^b, \\ dr_s = \dfrac{\sqrt{1 - k r_s^2}}{\alpha^2(t_s)} c_s \, ds, \quad dc_s = \dfrac{3\sigma^2}{2} c_s ds + \dfrac{b_s^2 \sqrt{1 - k r_s^2}}{\alpha^2(t_s) r_s^3} ds + dM_s^c, \\ da_s = \dfrac{3\sigma^2}{2} a_s ds + \sigma^2 \dfrac{\alpha^2(t_s)}{a_s} + dM_s^a. \end{cases}$$

Comportement asymp. de la diffusion de dim. 2

Proposition

Supposons que $t \mapsto H(t)$ *est décroissante positive sur* $\mathbb{R}^+$*. On pose* $H_\infty = \lim_{+\infty} H(t)$*.*

- *Si* $H_\infty > 0$*, alors le processus* $\dot{t}_s$ *est récurrent dans* $]1 + \infty[$*.*
- *Si* $H_\infty = 0$*, alors* $\dot{t}_s$ *est transitoire, et si l'on pose*

$$Z_s := \alpha(t_s)\dot{t}_s \times \left(\int_{t_0}^{t_s} \alpha(u)du\right)^{-1}, \text{ alors}$$

$$0 < \liminf_{s \to +\infty} Z_s < \limsup_{s \to +\infty} Z_s < +\infty \text{ p.s.}$$

$$Z_s \xrightarrow{d} \sigma^2/2 \times \Gamma(2).$$

Comportement asymptotique de la diffusion

Soit $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ la diffusion de FLJ, on pose $\tau := \sup\{s,\ t_s \leq T\}$.

Proposition

Lorsque s tend vers τ, presque sûrement, on a :

- *Si $\int^T dv/\alpha(v) < +\infty$:*

$$r_s \to r_\infty \in \mathbb{R}_+^*, \quad \theta_s \to \theta_\infty \in \mathbb{S}^2.$$

- *Si $\int^T dv/\alpha(v) = +\infty$:*

$$r_s \to +\infty \ \textit{ et } \ \theta_s \to \theta_\infty \in \mathbb{S}^2 \ \textit{ si } \ k = 0 \ \textit{ ou } \ -1,$$

$$r_s \to 1 \ \textit{ et } \ \theta_s \ \textit{ diverge si } \ k = 1.$$

Merci de votre attention...