Mouvement brownien et compactification de variétés lorentziennes

Jürgen Angst

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur, Strasbourg

Journées de Probabilités 2009
Poitiers, le 10 juin 2009

Motivations et rappels

Motivations

Il existe des liens profonds entre les propriétés locales et asymptotiques d'un mouvement brownien sur une variété riemannienne et la géométrie de cette variété.

Existe-t-il de tels liens dans le cadre lorentzien ?

- Qu'est-ce qu'un mouvement brownien sur une variété lorentzienne ?
- Son étude nous apprend-elle quelque chose sur la géométrie de la variété sous-jacente ?

Motivations

Il existe différentes manières de compactifier une variété lorentzienne parmi lesquelles :

- la compactification conforme ;
- la compactification causale.

Peut-on envisager une compactification associée au comportement asymptotique du mouvement brownien sur la variété ?

Le cadre géométrique de la théorie de la relativité

Espace-temps de Minkowski et espace hyperbolique

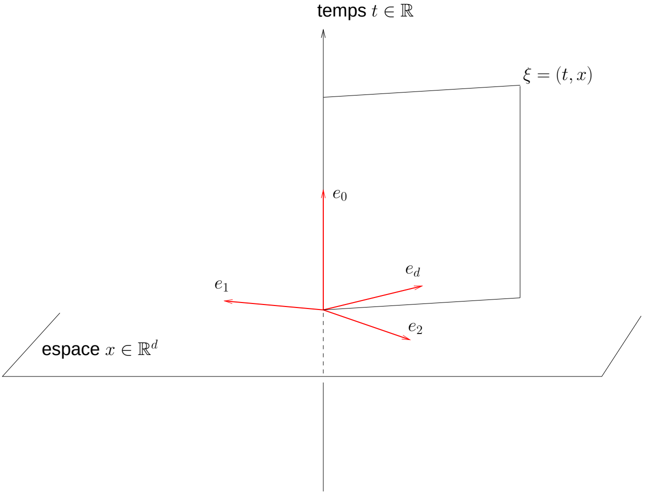
On désigne par $\mathbb{R}^{1,d} := \{\xi = (\xi^0, \xi^i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d\}$ l'espace-temps de Minkowski de la relativité restreinte, muni de la pseudo-métrique :

$$q(\xi) = \langle \xi, \xi \rangle := -|\xi^0|^2 + \sum_{i=1}^{d} |\xi^i|^2,$$

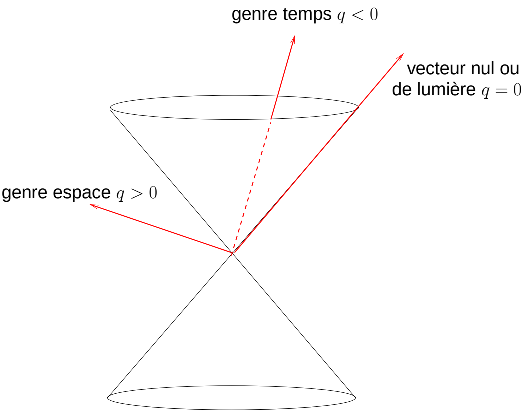
et par $\mathbb{H}^d$ la partie positive de la pseudo-sphère unité :

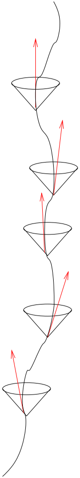
$$\mathbb{H}^d := \{\xi \in \mathbb{R}^{1,d} \,|\, \xi^0 > 0 \text{ et } \langle \xi, \xi \rangle = -1\}.$$

L'espace-temps de Minkowski



Le cône de lumière





Paramétrisation par le temps propre

Une trajectoire de genre temps $(\xi_u, \dot{\xi}_u)_{u \geq 0}$, $i.e.$ telle que $q(\dot{\xi}_u) < 0$ peut toujours être reparamétrée par la longueur d'arc ou temps propre s de sorte que $q(\dot{\xi}_s) = -1$.

Auquel cas, la trajectoire $(\xi_s, \dot{\xi}_s)_{s \geq 0}$ est à valeurs dans le fibré tangent unitaire (espace des phases) $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$.

Le cadre de la théorie de la relativité générale

Dans la théorie de la relativité générale, l'espace $\mathbb{R}^{1,d}$ est remplacé par une variété lorentzienne $\mathcal{M}$ de dimension $d+1$.

En chaque point de ξ de $\mathcal{M}$, l'espace tangent $T_\xi\mathcal{M}$ est muni d'une pseudo-métrique $g = g(\xi)$ de signature $(-1, 1, \dots, 1)$.

Comme dans $\mathbb{R}^{1,d}$, les vecteurs (et les courbes) dans $T\mathcal{M}$ sont discriminés selon le signe de leur norme. Une courbe de genre temps $(\xi_u, \dot{\xi}_u)_{u\geq 0} \in T\mathcal{M}$ peut toujours être paramétrée par le temps propre s, auquel cas $(\xi_s, \dot{\xi}_s)_{s\geq 0}$ vit dans le fibré tangent unitaire $T^1\mathcal{M}$.

Le mouvement brownien dans l'espace de Minkowski

La diffusion relativiste de Dudley

Soit $\dot{\xi}_s$ un mouvement brownien hyperbolique dans $\mathbb{H}^d$ et

$$\xi_s := \xi_0 + \int_0^s \dot{\xi}_u du.$$

Alors $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ est une diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$.

Sa loi est invariante sous l'action du groupe de Lorentz.

Le théorème de classification de Dudley

Théorème (Processus markoviens dans $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$, dont la loi est invariante sous l'action des isométries affines)

Ce sont les processus $(\xi_s, \dot{\xi}_s) \in \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ tels que :

• $(\dot{\xi}_s)_{s\geq 0}$ *est un processus de Markov dans $\mathbb{H}^d$ dont la loi est invariante sous l'action des isométries de $\mathbb{H}^d$;*

• $\xi_s = \xi_0 + \int_0^s \dot{\xi}_u du.$

Le processus $\dot{\xi}_s$ peut être :

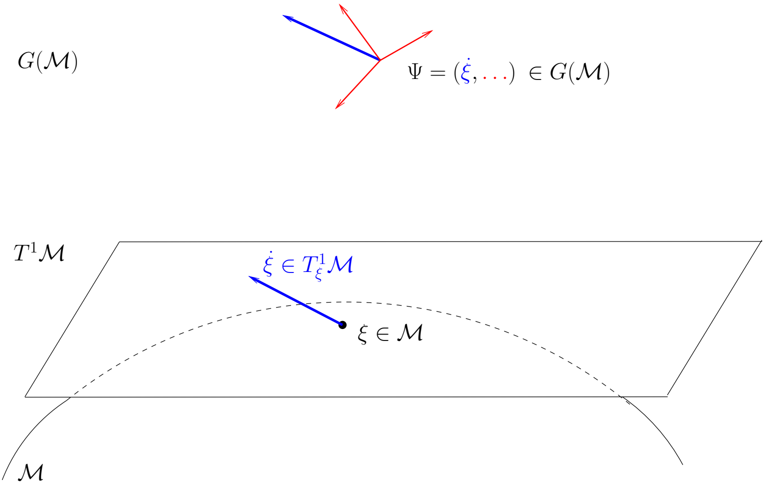
• *continu : $\dot{\xi}_s$ est alors un mouvement brownien dans $\mathbb{H}^d$;*

• *un processus de saut : $\dot{\xi}_s$ processus de Poisson dans $\mathbb{H}^d$;*

• *une superposition de trajectoires continues et de sauts.*

Mouvement brownien sur une variété lorentzienne générale

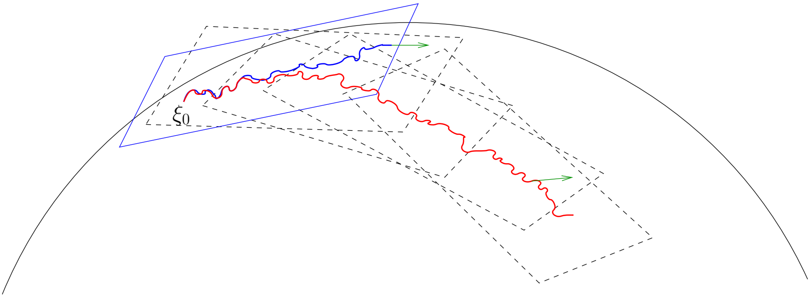
Le contexte géométrique



Anti-développement stochastique

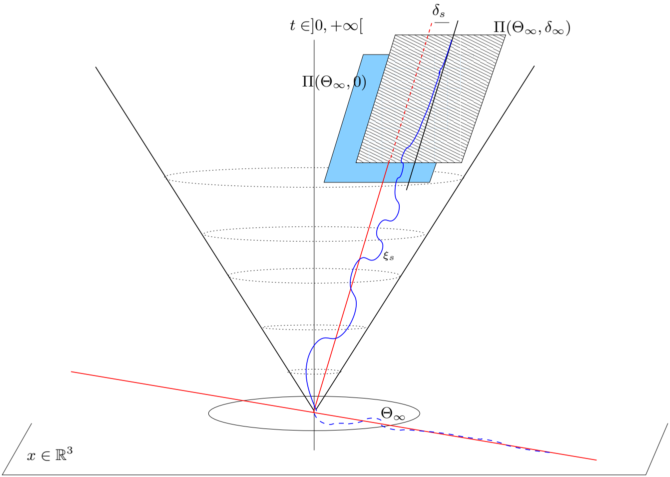
Diffusion de Dudley dans $T^1_{\xi_0}\mathcal{M} \approx \mathbb{H}^d$

Diffusion de Franchi et Le Jan



Asymptotique des trajectoires browniennes

Asymptotique du mouvement brownien dans l’espace de Minkowski


δ_s
$t \in]0, +\infty[$
$\Pi(\Theta_\infty, \delta_\infty)$
$\Pi(\Theta_\infty, 0)$
ξ_s
Θ_∞
$x \in \mathbb{R}^3$

Théorème (Bailleul 08)

Soient $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ *un point de* $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ *et* $\mathbb{P}_0$ *la loi de la diffusion de Dudley* $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ *issue de* $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$*. Alors* $\mathbb{P}_0-$*presque sûrement, il existe un angle* $\Theta_\infty \in \mathbb{S}^2$ *et un plan* $\Pi(\Theta_\infty, \delta_\infty)$ *aléatoires tels que, lorsque* s *tend vers l'infini, le processus* ξ_s *tend vers l'infini dans la direction* Θ_∞ *le long de* $\Pi(\Theta_\infty, \delta_\infty)$*.*

Théorème (Bailleul 08)

La tribu invariante pour le processus $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$*, incluse dans la tribu asymptotique*

$$\bigcap_{t \geq 0} \sigma\left((\xi_s, \dot{\xi}_s), \ s > t \right),$$

coïncide $\mathbb{P}_0-$*presque sûrement avec la tribu* $\sigma(\Theta_\infty, \delta_\infty)$ *engendrée par les variables aléatoires* $\Theta_\infty \in \mathbb{S}^2$ *et* $\delta_\infty \in \mathbb{R}^+$*.*

Mouvement brownien dans les espaces de Robertson-Walker

Les espaces de Robertson-Walker

Ce sont des variétés du type $\mathcal{M} = I \times M$, où $I =]0, T[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et M est une variété riemannienne homogène et isotrope, *i.e.* $M = \mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3,$ ou $\mathbb{H}^3$. Elles sont munies de pseudo-métriques de la forme :

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2(t) d\ell^2.$$

où $d\ell^2$ est la métrique riemannienne usuelle sur M.

Ces variétés sont fréquemment utilisées en cosmologie comme modèles dans la théorie du Big-Bang.

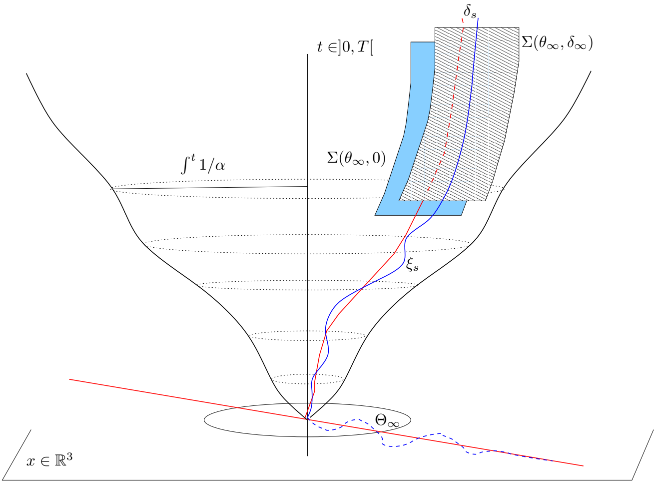
Géométrie des espaces de Robertson-Walker

La géométrie des espaces de Robertson-Walker diffère radicalement selon que l'inverse du facteur d'expansion α est intégrable ou non :

$$\int_{\cdot}^{T} \frac{du}{\alpha(u)} < +\infty \quad \text{ou} \quad \int_{\cdot}^{T} \frac{du}{\alpha(u)} = +\infty.$$

Il en est de même pour le comportement asymptotique du mouvement brownien dans ces espaces.

Lorsque $\displaystyle\int_{.}^{T} \frac{du}{\alpha(u)} = +\infty$


δ_s
$t \in]0, T[$
$\Sigma(\theta_\infty, \delta_\infty)$
$\int^t 1/\alpha$
$\Sigma(\theta_\infty, 0)$
ξ_s
Θ_∞
$x \in \mathbb{R}^3$

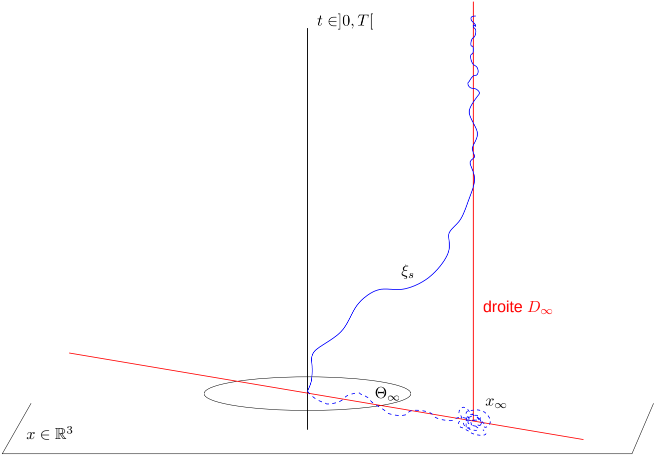
Théorème

On considère un espace $\mathcal{M} = I \times_\alpha \mathbb{R}^3$ *tel que*

$$\int_{\cdot}^{T} \frac{du}{\alpha(u)} = +\infty.$$

Soient $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ *un point de un point de* $T^1\mathcal{M}$ *et* $\mathbb{P}_0$ *la loi de la diffusion de Franchi et Le Jan* $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ *issue de* $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$. *Alors* $\mathbb{P}_0-$*presque sûrement, il existe un angle* $\Theta_\infty \in \mathbb{S}^2$ *et une hypersurface* $\Sigma(\Theta_\infty, \delta_\infty)$ *aléatoires tels que, lorsque* s *tend vers l'infini, le processus* ξ_s *tend vers l'infini dans la direction* Θ_∞ *le long de* $\Sigma(\Theta_\infty, \delta_\infty)$.

Lorsque $\displaystyle\int_{\cdot}^{T} \frac{du}{\alpha(u)} < +\infty$


$t \in]0, T[$
ξ_s
droite D_∞
Θ_∞
x_∞
$x \in \mathbb{R}^3$

Théorème

On considère un espace $\mathcal{M} = I \times_\alpha \mathbb{R}^3$ *tel que*

$$\int_{\cdot}^{T} \frac{du}{\alpha(u)} < +\infty.$$

Soient $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ *un point de un point de* $T^1\mathcal{M}$ *et* $\mathbb{P}_0$ *la loi de la diffusion de Franchi et Le Jan* $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ *issue de* $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$*. Si la fonction de Hubble* $H = \alpha'/\alpha$ *n'est pas de cube intégrable, alors* $\mathbb{P}_0-$*presque sûrement, il existe une droite* D_∞ *aléatoire telle que, lorsque* s *tend vers l'infini, le processus* ξ_s *tend vers l'infini en s'enroulant autour de la droite* D_∞*.*

Théorème

La tribu invariante pour le processus $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$, incluse dans la tribu asymptotique

$$\bigcap_{t \geq 0} \sigma\left((\xi_s, \dot{\xi}_s), \ s > t \right),$$

coïncide $\mathbb{P}_0-$presque sûrement avec la tribu $\sigma(x_\infty)$ engendrée par la variable aléatoire $x_\infty \in \mathbb{R}^3$.

Mouvement brownien et géodésiques de lumière

Conjecture (Franchi, Le Jan)

Sur une variété lorentzienne, la comportement asymptotique du mouvement brownien (de la diffusion de Franchi et Le Jan) est semblable à celui d'une géodésique de lumière.

La frontière de Poisson du mouvement brownien sur une variété lorentzienne est composée de classes d'équivalence de géodésiques de lumière.

Éléments de bibliographie

R. M. Dudley.
Lorentz-invariant Markov processes in relativistic phase space.
Ark. Mat., 6 :241–268, 1966.

R. M. Dudley.
A note on Lorentz-invariant Markov processes.
Ark. Mat., 6 :575–581 (1967), 1967.

R. M. Dudley.
Asymptotics of some relativistic Markov processes.
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 70 :3551–3555, 1973.

- Jacques Franchi and Yves Le Jan.
  Relativistic diffusions and Schwarzschild geometry.
  Comm. Pure Appl. Math., 60(2) :187–251, 2007.
- Jürgen Angst and Jacques Franchi.
  Central limit theorem for a class of relativistic diffusions.
  J. Math. Phys., 48(8) :083101, 20, 2007.
- Ismael Bailleul.
  Poisson boundary of a relativistic diffusion.
  Probab. Theory Related Fields, 141(1-2) :283–329, 2008.
- Jürgen Angst.
  Étude de diffusions à valeurs dans des variétés lorentziennes.
  Thèse de l'Université de Strasbourg, 2009.