Construction et asymptotique du mouvement brownien sur une variété lorentzienne :

le cas des espaces de Robertson-Walker

Jürgen Angst

Section de mathématiques
Université de Genève

Séminaire de géométrie et dynamique
UMPA, ÉNS Lyon, le 10 mars 2010

Motivations

Il existe des liens profonds entre les propriétés asymptotiques d'un mouvement brownien sur une variété riemannienne et la géométrie de cette variété.

Existe-t-il de tels liens dans le cadre lorentzien ?

- Qu'est-ce qu'un mouvement brownien sur une variété lorentzienne ?
- Son étude nous apprend-elle quelque chose sur la géométrie de la variété sous-jacente ?

1. Construction du mouvement brownien relativiste
   - Le mouvement brownien dans l'espace de Minkowski
   - Le cas d'une variété lorentzienne générale
2. Asymptotique du mouvement brownien relativiste
   - Le cas de l'espace de Minkowski
   - Le cas des espaces de Robertson-Walker
   - Reformulation à l'aide de la notion de frontière causale
3. Frontière de Poisson de la diffusion
   - Le cas de l'espace de Minkowski
   - Le cas des espaces de Robertson-Walker

Mouvement brownien dans l'espace de Minkowski

Espace-temps de Minkowski et espace hyperbolique

On désigne par $\mathbb{R}^{1,d} := \{\xi = (\xi^0, \xi^i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d\}$ l'espace-temps de Minkowski de la relativité restreinte, muni de la pseudo-métrique :

$$q(\xi) = \langle \xi, \xi \rangle := -|\xi^0|^2 + \sum_{i=1}^{d} |\xi^i|^2,$$

et par $\mathbb{H}^d$ la partie positive de la pseudo-sphère unité :

$$\mathbb{H}^d := \{\xi \in \mathbb{R}^{1,d} \,|\, \xi^0 > 0 \text{ et } \langle \xi, \xi \rangle = -1\}.$$

Rappels sur la notion de processus stochastique

Se donner un processus stochastique X, continu, à valeurs dans une variété $\mathcal{M}$, c'est se donner de manière équivalente :

- une variable aléatoire

$$\begin{array}{rccl} X : & (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) & \to & (C(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}), \mathcal{B}) \\ & \omega & \mapsto & X(\omega) = (s \mapsto X(\omega)(s) = X_s(\omega)) \, , \end{array}$$

  et donc une mesure de probabilité sur $C(\mathbb{R}^+, \mathcal{M})$;

- une famille de mesures de probabilité $(\mathbb{P}_z)_{z \in \mathcal{M}}$, où $\mathbb{P}_z$ a pour support l'ensemble $\{f \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}), \ f(0) = z\}$, *i.e.* $\mathbb{P}_z$ est la loi des trajectoires $(X_s)_{s \geq 0}$ issues de $X_0 = z$.

Caractérisation géométrique du MB euclidien

Proposition

Parmi les processus à valeurs dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, le mouvement brownien euclidien est l'unique processus qui vérifie les trois conditions suivantes :

- c'est un processus markovien ;
- ses trajectoires sont continues ;
- sa loi est invariante sous l'action du groupe des isométries affines de $\mathbb{R}^d$, *i.e.* $\forall \phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^d),\ A$ mesurable :

$$\mathbb{P}_0(A) = \mathbb{P}_z(z + A), \quad \mathbb{P}_0(A) = \mathbb{P}_0(\phi(A)).$$

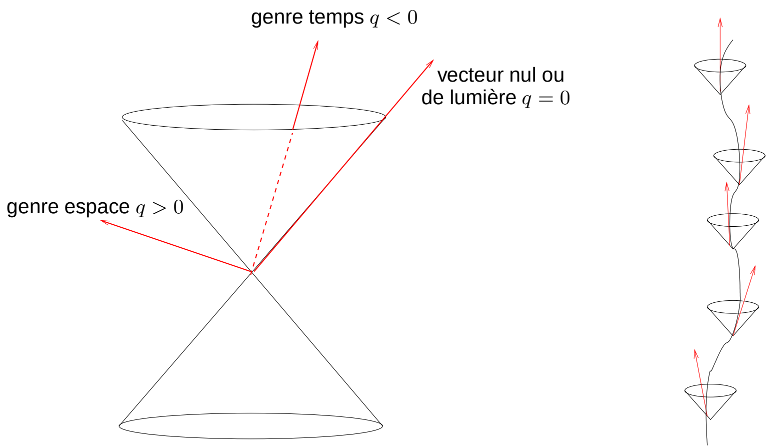
Un résultat négatif

Théorème (Dudley, 1966)

Il n'existe pas de processus à valeurs dans $\mathbb{R}^{1,d}$, qui soit à la fois

- markovien ;
- à trajectoires continues ;
- et dont loi soit invariante sous l'action du groupe des isométries affines de $\mathbb{R}^{1,d}$.

Nature des trajectoires dans l'espace de Minkowski



Vers un mouvement brownien minkowskien

Question : existe-t-il des processus stochastiques

- markoviens,
- dont les trajectoires sont continues et de genre temps, *i.e.* sont à valeurs dans $T^1\mathbb{R}^{1,d} \simeq \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$,
- et dont la loi est invariante sous l'action du groupe de Lorentz ?

Vers un mouvement brownien minkowskien

Théorème (Dudley, 1966)

Il existe un et un seul processus $(\xi_s, \dot{\xi}_s)_{s\geq 0}$ à valeurs dans $T^1\mathbb{R}^{1,d}$ vérifiant les conditions précédentes, obtenu en considérant pour $\dot{\xi}_s$ un mouvement brownien hyperbolique dans $\mathbb{H}^d$ et

$$\xi_s := \xi_0 + \int_0^s \dot{\xi}_u du.$$

Enseignements du cas minkowskien

- Il existe une notion naturelle et intrinsèque de mouvement brownien à valeurs dans l'espace de Minkowski ;
- la définition du processus implique de travailler dans l'espace des phases, *i.e.* dans le fibré tangent unitaire au dessus de $\mathbb{R}^{1,d}$;
- *de facto*, la projection $(\xi_s)_{s\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{1,d}$ du processus $(\xi_s, \dot{\xi}_s)_{s\geq 0}$, a une régularité C^1.

Mouvement brownien sur une variété lorentzienne générale

MB sur une variété lorentzienne générale

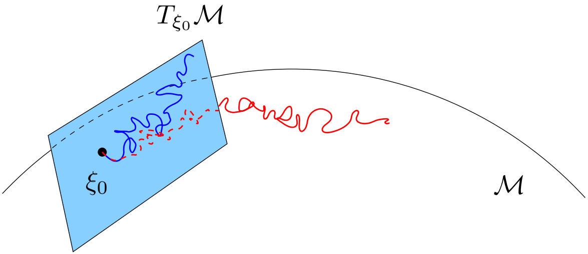
En 2007, adaptant la notion de relèvement horizontal au cadre lorentzien, Franchi et Le Jan ont étendu les travaux de Dudley au cas d'une variété lorentzienne générale $\mathcal{M}$.

Ils ont ainsi défini une diffusion $(\xi_s, \dot{\xi}_s)_{s \geq 0}$ à valeurs dans $T^1\mathcal{M}$, *i.e.* un processus markovien et continu, qui possède l'invariance lorentzienne.

Description géométrique

Généralisation du mouvement brownien minkowskien

Idée : le mouvement brownien sur $\mathcal{M}$ est construit à partir du mouvement brownien minkowskien à l'aide de la notion de transport parallèle stochastique.



Description géométrique de la diffusion relativiste

Soient $\mathcal{M}$ une variété lorentzienne, $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$, et $(\xi_s, \dot{\xi}_s)_{s\geq 0}$ le processus issu de $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ résultant de la construction de Franchi et Le Jan.

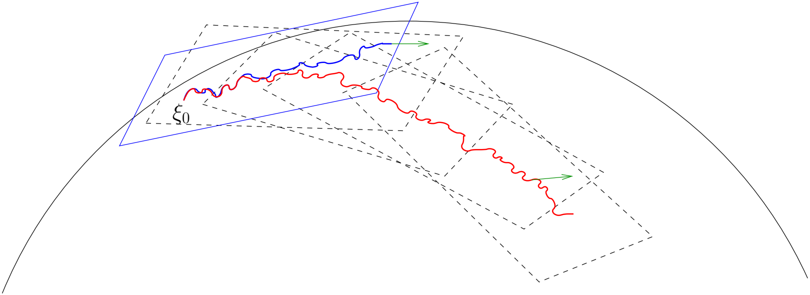
Théorème (Franchi–Le Jan, 2007)

Si $\overleftarrow{\xi}(s) : T_{\xi_s}\mathcal{M} \to T_{\xi_0}\mathcal{M}$ désigne le transport parallèle inverse le long des courbes C^1 $(\xi_{s'} \,|\, 0 \leq s' \leq s)$, alors $\zeta_s := \overleftarrow{\xi}(s)\, \dot{\xi}_s$ est un mouvement brownien hyperbolique dans $T^1_{\xi_0}\mathcal{M} \simeq \mathbb{H}^d$.

Anti-développement stochastique

Diffusion de Dudley dans $T^1_{\xi_0}\mathcal{M} \approx \mathbb{H}^d$

Diffusion relativiste dans $T^1\mathcal{M}$



Description dynamique

La notion de générateur infinitésimal

Fait : la donnée d'un processus de diffusion $(X_s)_{s\geq 0}$ à valeurs dans une variété $\mathcal{M}$ est équivalente à la donnée d'un opérateur différentiel $\mathcal{L}$, d'ordre 2, agissant sur $C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$.

Le lien entre processus et opérateur différentiel correspondant est le suivant :

$$\mathcal{L}f(x) := \lim_{s\to 0} \mathbb{E}_x \left[\frac{f(X_s) - f(x)}{s} \right].$$

Par ailleurs, $(X_s)_{s\geq 0}$ est solution d'un système d'équations différentielles stochastiques associé à $\mathcal{L}$.

Générateur du mouvement brownien relativiste

Dans le cas du mouvement brownien $(\xi_s, \dot{\xi}_s)_{s \geq 0}$ à valeurs dans $T^1\mathbb{R}^{1,d}$ introduit par Dudley, l'opérateur $\mathcal{L}$ associé au processsus est donné par :

$$\mathcal{L}f(\xi, \dot{\xi}) := \underbrace{\dot{\xi}\,\partial_\xi f(\xi, \dot{\xi})}_{\text{flot géodésique}} + \frac{1}{2}\underbrace{\Delta_{\mathbb{H}^d} f(\xi, \dot{\xi})}_{\text{perturbation}}.$$

Description dynamique de la diffusion relativiste

Par définition, le générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ de la diffusion introduite par Franchi et Le Jan se décompose en une somme :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \frac{1}{2}\,\Delta_{\mathcal{V}},$$

où

- $\mathcal{L}_0$ est le générateur du flot géodésique ;
- $\Delta_{\mathcal{V}}$ est le Laplacien vertical.

Description dynamique de la diffusion relativiste

Par définition, le générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ de la diffusion introduite par Franchi et Le Jan se décompose en une somme :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{V}},$$

où

- $\mathcal{L}_0$ est le générateur du flot géodésique ;
- $\Delta_{\mathcal{V}}$ est le Laplacien vertical.

Une définition plus terre à terre

Étant donnée un système de coordonnées ξ^μ sur $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$, le mouvement brownien relativiste sur $T^1\mathcal{M}$ est la solution du système d'équations différentielles stochastiques :

$$(\star) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\xi_s^\mu = \dot{\xi}_s^\mu ds, \\ \\ d\dot{\xi}_s^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\rho}(\xi_s)\dot{\xi}_s^\nu \dot{\xi}_s^\rho ds + \frac{\dim(\mathcal{M})}{2}\dot{\xi}_s^\mu ds + dM_s^\mu, \end{array} \right.$$

avec

$$d\langle M^\mu,\ M^\nu\rangle_s = \left(\dot{\xi}_s^\mu \dot{\xi}_s^\nu + g^{\mu\nu}\right) ds.$$

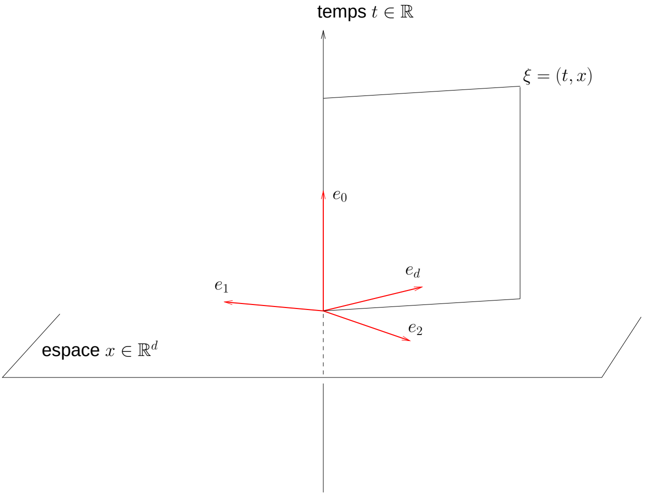
Moralité

- Le mouvement brownien sur une variété lorentzienne générale $\mathcal{M}$ peut être vu comme le développement stochastique du mouvement brownien dans l'espace de Minkowski ;
- le flot associé à son générateur est une perturbation du flot géodésique sur $T^1\mathcal{M}$ par le Laplacien vertical.

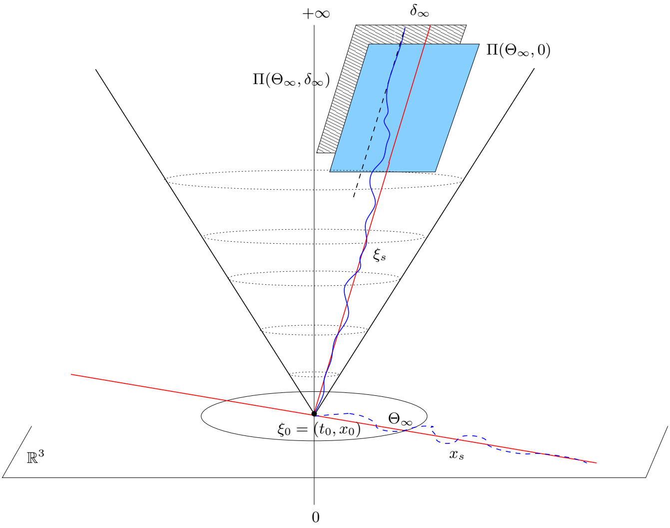
Asymptotique du mouvement brownien relativiste

Le cas de l’espace de Minkowski

L'espace-temps de Minkowski



Projection $\xi_s = (t_s, x_s)$ du MB $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ dans $T^1\mathbb{R}^{1,d}$



Théorème (Bailleul 08)

Soient $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ un point de $T^1\mathbb{R}^{1,d} \simeq \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ et $\mathbb{P}_{(\xi_0,\dot{\xi}_0)}$ la loi du mouvement brownien $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ issu de $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$.

Alors $\mathbb{P}_{(\xi_0,\dot{\xi}_0)}-$presque sûrement, il existe

- un angle $\Theta_\infty \in \mathbb{S}^2$ aléatoire,
- un plan $\Pi(\Theta_\infty, \delta_\infty)$ aléatoire,

tels que lorsque s tend vers l'infini, le processus ξ_s tend vers l'infini dans la direction Θ_∞ le long de $\Pi(\Theta_\infty, \delta_\infty)$.

Les espaces de Robertson-Walker

Les espaces de Robertson-Walker

Ce sont des produits tordus du type $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$, où

$i)$ $I =]0, T[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$;

$ii)$ M est une variété riemannienne homogène et isotrope, $i.e.$ $M = \mathbb{S}^3,\ \mathbb{R}^3,$ ou $\mathbb{H}^3$.

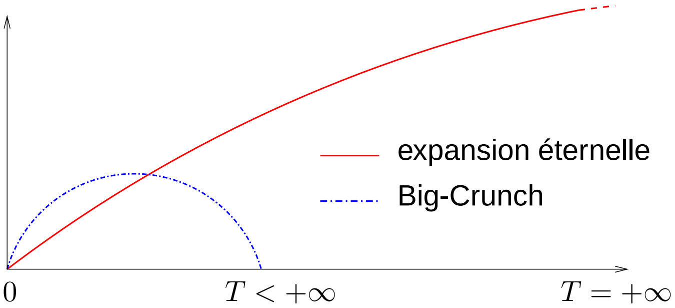
Elles sont munies de pseudo-métriques de la forme :

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2(t) d\ell^2.$$

où $d\ell^2$ est la métrique riemannienne usuelle sur M.

Ces variétés sont fréquemment utilisées en cosmologie comme modèles dans la théorie du Big-Bang.

Types de facteurs d'expansion α considérés



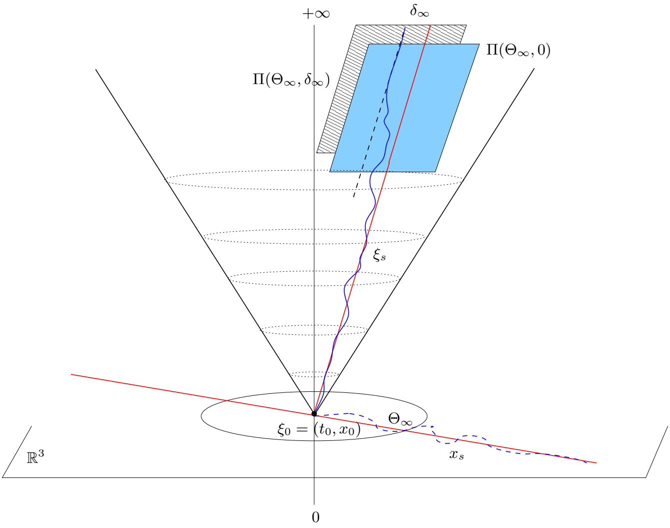
Existence, unicité, temps de vie de la diffusion

Proposition

Soient $\mathcal{M} =]0, T[\times_\alpha M$ un espace de Roberton-Walker et $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$. Le système d'eds $(\star)$ qui définit la diffusion relativiste admet une unique solution forte $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$ issue de $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$. Cette solution est définie jusqu'au temps d'explosion $\tau := \inf\{s > 0,\ t_s = T\}$.

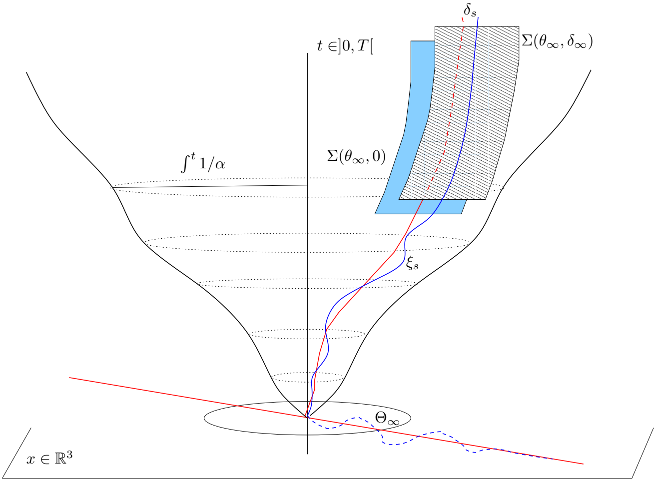
Asymptotique dans les espaces de Robertson-Walker

Rappel : cas de l'espace de Minkowski



Le cas où $M = \mathbb{R}^3$ et $\displaystyle\int^T \frac{du}{\alpha(u)} = +\infty$

Le cas où $\mathcal{M} =]0, T[\times_\alpha \mathbb{R}^3$ avec $\int^T \frac{du}{\alpha(u)} = +\infty$



Théorème

Soient $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ un point de $T^1\mathcal{M}$ et $\mathbb{P}_{(\xi_0,\dot{\xi}_0)}$ la loi du mouvement brownien $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ issu de $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$.

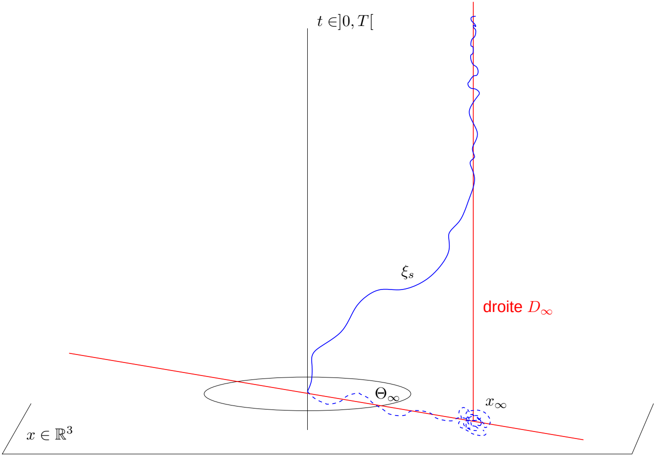
Alors $\mathbb{P}_{(\xi_0,\dot{\xi}_0)}-$presque sûrement, il existe

- un angle $\Theta_\infty \in \mathbb{S}^2$ aléatoire,
- une hypersurface $\Sigma(\Theta_\infty, \delta_\infty)$ aléatoire,

tels que lorsque s tend vers l'infini, le processus ξ_s tend vers l'infini dans la direction Θ_∞ le long de $\Sigma(\Theta_\infty, \delta_\infty)$.

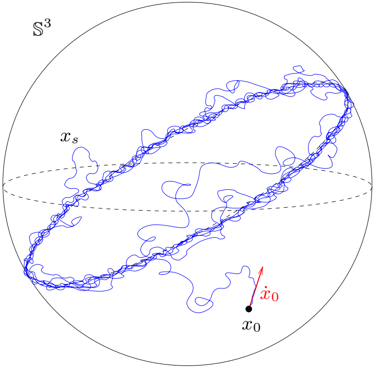
Le cas où $M = \mathbb{R}^3$ et $\displaystyle\int^T \frac{du}{\alpha(u)} < +\infty$

Le cas où $\mathcal{M} =]0, T[\times_\alpha \mathbb{R}^3$ avec $\int^T \frac{du}{\alpha(u)} < +\infty$



Le cas où $M = \mathbb{S}^3$ et $\displaystyle\int^T \frac{du}{\alpha(u)} = +\infty$

Le cas où $\mathcal{M} =]0,T[\times_\alpha \mathbb{S}^3$ avec $\int^T \frac{du}{\alpha(u)} = +\infty$



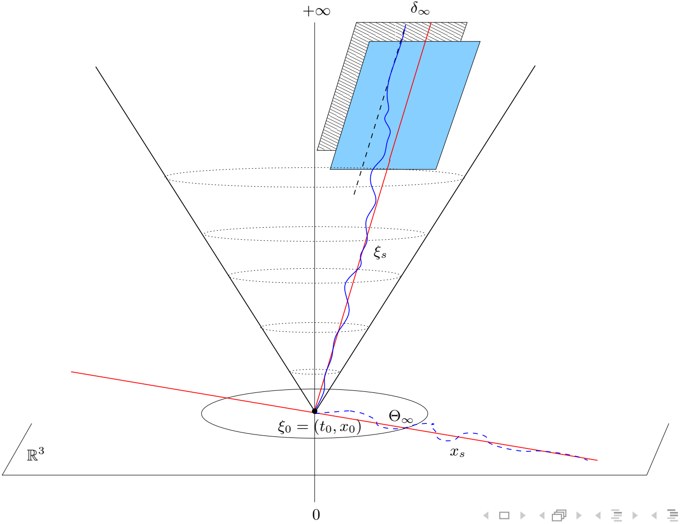
Reformulation à l’aide de la notion de frontière causale

La notion de frontière causale

Une variété lorentzienne fortement causale $\mathcal{M}$ admet une frontière naturelle $\partial \mathcal{M}_c = \partial \mathcal{M}_c^- \cup \partial \mathcal{M}_c^+$, appelée *frontière causale*, constituée de classes d'équivalence de courbes causales (*i.e.* de genre temps ou de lumière).

Dans le cas des espaces de Robertson-Walker $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$, cette frontière est explicite : elle dépend naturellement du facteur d'expansion α et de la fibre M.

Dans l'espace de Minkowski, la frontière causale $\partial \mathcal{M}_c^+$ s'identifie à un cône $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$.



Théorème (reformulation du résultat de Bailleul)

Soient $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ un point de $T^1\mathbb{R}^{1,d} \simeq \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ et $\mathbb{P}_{(\xi_0,\dot{\xi}_0)}$ la loi du mouvement brownien $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ issu de $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$.

Alors $\mathbb{P}_{(\xi_0,\dot{\xi}_0)}-$presque sûrement, lorsque s tend vers l'infini, le processus ξ_s converge vers un point aléatoire $(\Theta_\infty, \delta_\infty)$ de la frontière causale $\partial \mathcal{M}_c^+$.

Théorème

Soit $\mathcal{M} =]0, T[\times_\alpha M$ un espace de Robertson-Walker. Soient $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$ et $\mathbb{P}_{(\xi_0, \dot{\xi}_0)}$ la loi du mouvement brownien $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$ issu de $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$. Alors presque sûrement, lorsque s tend vers $\tau = \inf\{s > 0, t_s = T\}$, le processus ξ_s converge vers un point aléatoire de la frontière causale $\partial\mathcal{M}_c^+$.

- En établissant le résultat précédant, on montre au passage que le processus décrit asymptotiquement une "géodésique de lumière aléatoire".
- les preuves des différents résultats contenu dans l'énoncé précédent se font au cas par cas et font appels à des notions fines d'analyse stochastique.

Asymptotique du vecteur

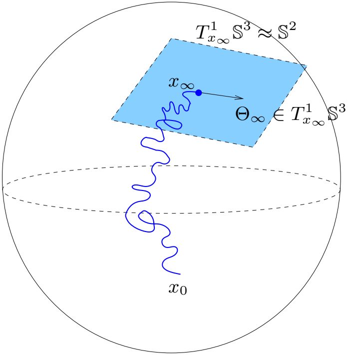
dérivé normalisé

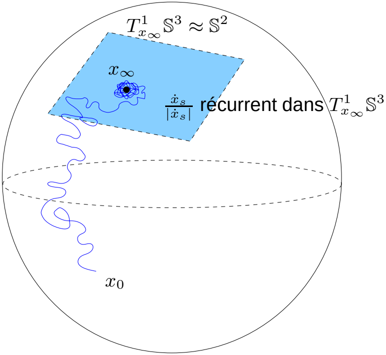
lorsque $\displaystyle\int^{T} \frac{du}{\alpha(u)} < +\infty$

Théorème (Cas où $\int^T 1/\alpha < +\infty$)

Lorsque s tend vers $\tau = \inf\{s > 0, t_s = T\}$, le processus x_s converge p.s. vers un point aléatoire x_∞ de la fibre M et le processus $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$ vérifie les assertions suivantes :

- $i)$ si $T < \infty$, alors $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$ converge vers $\Theta_\infty \in T^1_{x_\infty}M$;
- $ii)$ si $T = +\infty$ et l'expansion est polynomiale, alors $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$ converge vers un point Θ_∞ de $T^1_{x_\infty}M$;
- $iii)$ si $T = +\infty$ et l'expansion est exponentielle, alors $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$ décrit asymptotiquement un mouvement brownien sphérique changé de temps dans $T^1_{x_\infty}M \approx \mathbb{S}^2$.


$T^1_{x_\infty}\mathbb{S}^3 \approx \mathbb{S}^2$
x_∞
$\Theta_\infty \in T^1_{x_\infty}\mathbb{S}^3$
x_0


$T^1_{x_\infty}\mathbb{S}^3 \approx \mathbb{S}^2$
x_∞
$\frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|}$ récurrent dans $T^1_{x_\infty}\mathbb{S}^3$
x_0

Frontière de Poisson

La notion de frontière de Poisson

La frontière de Poisson d'un processus $X = (X_s)_{s \geq 0}$ peut-être définie de manière équivalente comme :

- l'ensemble $\mathrm{Harm}_b(\mathcal{L})$ des fonctions harmoniques bornées pour l'opérateur $\mathcal{L}$ associé à X ;
- la tribu invariante $\mathrm{Inv}(X)$ du processus, *i.e.* la sous tribu de la tribu asymptotique

$$\bigcap_{t \geq 0} \sigma\left(X_s,\ s > t\right),$$

composée des évènements invariants par décalage $s \mapsto s + s'$, $s' > 0$.

La notion de frontière de Poisson

La bijection entre $\mathrm{Inv}(X)$ et $\mathrm{Harm}_b(\mathcal{L})$ est explicite :

$$Y \text{ v.a. bornée mesurable par rapport à } \mathrm{Inv}(X)$$

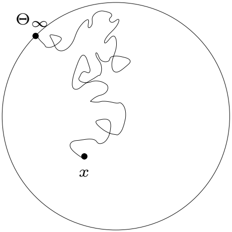
$$\updownarrow$$

$$h \in \mathrm{Harm}_b(\mathcal{L}), \quad h(x) := \mathbb{E}_x(Y)$$

La notion de frontière de Poisson

En particulier, si $\mathrm{Inv}(X) = \sigma(\ell_\infty)$ avec $\ell_\infty \in \partial \mathcal{M}$, alors

$$\mathrm{Harm}_b(\mathcal{L}) \simeq \mathbb{L}^\infty(\partial \mathcal{M}), \quad \text{via} \;\; h(x) = \mathbb{E}_x[F(\ell_\infty)] \leftrightarrow F.$$

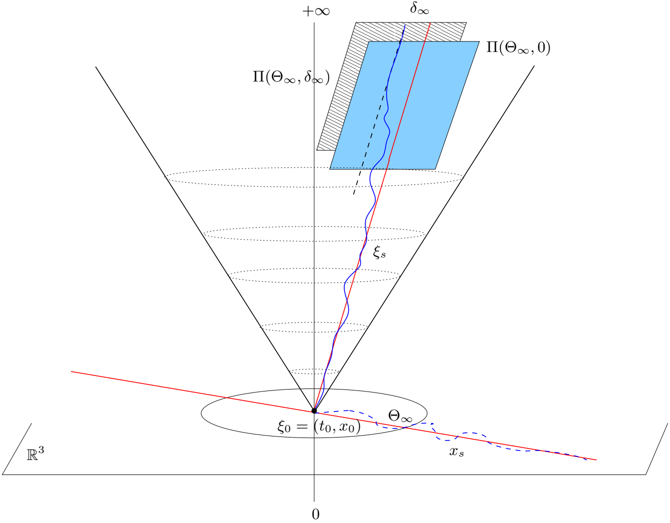


Exemple fondamental : si X est le MB dans $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$, $\mathrm{Inv}(X) = \sigma(\Theta_\infty)$ où $\Theta_\infty \in \partial \mathbb{D} = \mathbb{S}^1$ et

$$\mathrm{Harm}_b(\Delta_{\mathbb{D}}) \simeq \mathbb{L}^\infty(\mathbb{S}^1),$$

via $h(x) = \mathbb{E}_x[F(\Theta_\infty)] \leftrightarrow F$.

Le cas de l'espace de Minkowski


$+\infty$
δ_∞
$\Pi(\Theta_\infty, 0)$
$\Pi(\Theta_\infty, \delta_\infty)$
ξ_s
Θ_∞
$\xi_0 = (t_0, x_0)$
$\mathbb{R}^3$
x_s
0

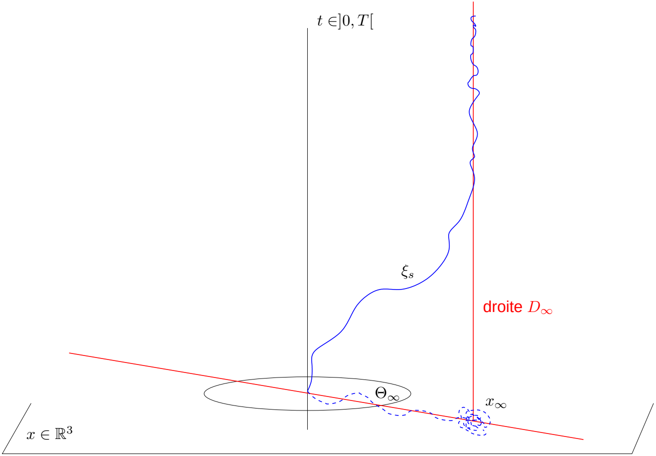
Théorème (Bailleul, 2008)

La tribu invariante pour le processus $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ coïncide $\mathbb{P}_{(\xi_0,\dot{\xi}_0)}-$presque sûrement avec la tribu $\sigma(\Theta_\infty, \delta_\infty)$ engendrée par la variable aléatoire $\ell_\infty = (\delta_\infty, \Theta_\infty) \in \partial\mathcal{M}_c^+ \simeq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$, *i.e.*

$$\mathrm{Harm}_b(\mathcal{L}) \simeq \mathbb{L}^\infty(\partial\mathcal{M}_c^+).$$

Espaces du type $\mathcal{M} =]0, +\infty[\times_\alpha \mathbb{R}^3$

où α est à croissance exponentielle.


$t \in]0, T[$
ξ_s
droite D_∞
Θ_∞
x_∞
$x \in \mathbb{R}^3$

On considère un espace de Robertson-Walker $\mathcal{M} =]0, +\infty[\times_\alpha \mathbb{R}^3$ où le facteur d'expansion α est à croissance exponentielle.

Théorème

Soient $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$ et $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$ la diffusion de Franchi et Le Jan issue de $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$. Alors $\mathbb{P}_{(\xi_0, \dot{\xi}_0)}-$presque sûrement, la tribu invariante pour le processus $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ coïncide avec la tribu $\sigma(x_\infty)$ engendrée par la variable $x_\infty \in \partial\mathcal{M}_c^+ \simeq \mathbb{R}^3$, *i.e.*

$$\mathrm{Harm}_b(\mathcal{L}) \simeq \mathbb{L}^\infty(\partial\mathcal{M}_c^+).$$

Question naturelle

Si $\mathcal{L}$ est le générateur infinitésimal du mouvement brownien relativiste sur une variété lorentzienne $\mathcal{M}$, a-t-on de manière générale

$$\mathrm{Harm}_b(\mathcal{L}) \simeq \mathbb{L}^\infty(\partial\mathcal{M}_c^+) \ \ ?$$

Éléments de preuve

Frontière de la diffusion temporelle

Par une technique de couplage (en des temps distincts), on montre tout d'abord le résultat suivant :

Proposition

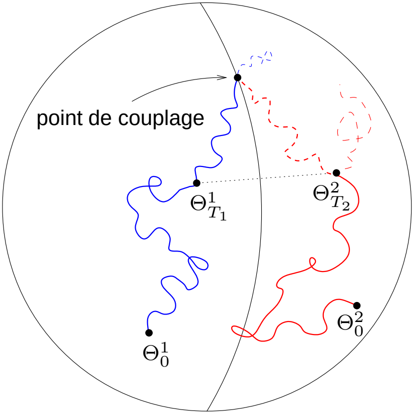
Les seules fonctions harmoniques bornées pour le générateur infinitésimal L de la diffusion temporelle $(t_s, \dot{t}_s)$ sont les fonctions constantes.

Frontière de la diffusion angulaire

Par une technique de couplage par symétrie, on montre ensuite :

Proposition

Soit $\mathcal{M} =]0, +\infty[\times_\alpha \mathbb{R}^3$ un espace de Robertson-Walker où l'expansion est exponentielle. Soient $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ des conditions initiales raisonnables et $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$ la diffusion relativiste issue de $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$. Alors presque sûrement, la tribu asymptotique de la sous-diffusion $(t_s, \dot{t}_s, \Theta_s := \dot{x}_s / |\dot{x}_s|)$ est triviale.


point de couplage
$\Theta^1_{T_1}$
$\Theta^2_{T_2}$
Θ^2_0
Θ^1_0

Frontière de la diffudsion globale

Théorème

Soit $\mathcal{M} =]0, +\infty[\times_\alpha \mathbb{R}^3$ un espace de Robertson-Walker où l'expansion est exponentielle. Soient $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$ des conditions initiales raisonnables et $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$ la diffusion de Franchi et Le Jan issue de $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$. Alors presque sûrement, la tribu asymptotique pour le processus $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ coïncide avec la tribu $\sigma(x_\infty)$ engendrée par la variable x_∞.