Un théorème limite central pour une classe de diffusions relativistes

Jürgen Angst

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur, Strasbourg

Journées de Probabilités 2007
10-14 Septembre 2007, La Londe les Maures

1. Quelques propriétés des processus d'Ornstein-Uhlenbeck
   - Convergence de l'écart quadratique moyen
   - Convergence du processus changé d'échelle
   - Incompatibilité avec la relativité
2. Exemples de diffusions minkowskiennes, problématique
   - Trajectoires dans l'espace des phases
   - Principaux exemples de diffusions considérées
   - Les questions que l'on cherche à résoudre
3. Nos résultats, leurs conséquences, esquisse de la preuve
   - Le cadre, les hypothèses
   - Résultats principaux et conséquences
   - Principales étapes de la preuve

Quelques propriétés des processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Convergence de l'écart quadratique moyen

Soit $(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{v}_t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ une solution du système d'éds :

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_t^i = v_t^i \, dt \\ \\ dv_t^i = -v_t^i \, dt + \sigma \, dW_t^i \end{array} \right. \qquad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq d.$$

Alors, lorsque t tend vers l'infini, on a :

$$\mathbb{E}\left[\frac{|\mathbf{x}|^2(t)}{t}\right] \to d \times \sigma^2.$$

Asymptotique du processus rééchelonné

Soit $(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{v}_t)_{t\geq 0}$ une solution du système d'éds, pour $1 \leq i \leq d$:

$$\begin{cases} dx_t^i = v_t^i\,dt \\ \\ dv_t^i = -v_t^i\,dt + \sigma\,dW_t^i \end{cases} \quad \text{avec} \quad (\mathbf{x}_0,\ \mathbf{v}_0) = (0,\ 0).$$

Alors lorsque t tend vers l'infini :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathbf{x}_{at}\right)_{a\geq 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sigma \times (\mathcal{B}_a)_{a\geq 0}\,,$$

où $\mathcal{B}$ est un mouvement brownien standard de dimension d.

Incompatibilité avec la relativité

- Les processus du type $(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{v}_t)_{t\geq 0} \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ où

$$\begin{cases} dx_t^i = v_t^i \, dt \\ dv_t^i = -v_t^i \, dt + \sigma \, dW_t^i \end{cases} \quad \text{pour} \ \ 1 \leq i \leq d,$$

  sont des modèles simples pour décrire l'évolution (position-vitesse) d'une particule baignant dans un fluide.

- Le processus $(\mathbf{v}_t)_{t\geq 0}$ est ergodique dans $\mathbb{R}^d$; en particulier, $|\mathbf{v}_t|$ n'est pas bornée.

Incompatibilité avec la relativité

- Les processus du type $(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{v}_t)_{t\geq 0} \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ où

$$\begin{cases} dx_t^i = v_t^i\, dt \\ dv_t^i = -v_t^i\, dt + \sigma\, dW_t^i \end{cases} \quad \text{pour} \;\; 1 \leq i \leq d,$$

  sont des modèles simples pour décrire l'évolution (position-vitesse) d'une particule baignant dans un fluide.

- Le processus $(\mathbf{v}_t)_{t\geq 0}$ est ergodique dans $\mathbb{R}^d$; en particulier, $|\mathbf{v}_t|$ n'est pas bornée.

Exemples de diffusions minkowskiennes considérées, problématique

Espace des phases

- L'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,d}$ est l'espace $\mathbb{R}^{d+1}$:

$$x = (x^\mu) = (x^0,\, x^i) = (x^0,\, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

muni de la pseudo-métrique minkowskienne

$$q(x,\, x) = |x^0|^2 - \sum_{i=1}^{d} |x^i|^2.$$

- Les trajectoires considérées $(x_t, p_t)_{t \geq 0}$ sont à valeurs dans l'espace des phases $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}_d$, où

$$\mathbb{H}_d := \{p = (p^0,\, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{1,d},\ \ |p^0|^2 - \sum_{i=1}^{d} |p^i|^2 = 1\}.$$

Espace des phases

- L'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,d}$ est l'espace $\mathbb{R}^{d+1}$:

$$x = (x^\mu) = (x^0,\, x^i) = (x^0,\, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

muni de la pseudo-métrique minkowskienne

$$q(x,\, x) = |x^0|^2 - \sum_{i=1}^{d} |x^i|^2.$$

- Les trajectoires considérées $(x_t, p_t)_{t \geq 0}$ sont à valeurs dans l'espace des phases $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}_d$, où

$$\mathbb{H}_d := \{p = (p^0,\, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{1,d},\;\; |p^0|^2 - \sum_{i=1}^{d} |p^i|^2 = 1\}.$$

Du cadre minkowskien au cadre euclidien

- Précisément, les diffusions considérées sont du type

$$(x_t, p_t)_{t\geq 0} = (t,\ \mathbf{x}(t),\ p^0(t),\ \mathbf{p}(t))_{t\geq 0}.$$

- Dans la suite, on posera $\mathbf{p} := r \times \Theta$ avec

$$r := |\mathbf{p}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |p^i|^2} \quad \text{et} \quad \Theta = (\theta^1, \ldots, \theta^d) = \frac{\mathbf{p}}{r}.$$

Du cadre minkowskien au cadre euclidien

- Précisément, les diffusions considérées sont du type

$$(x_t, p_t)_{t\geq 0} = (t,\ \mathbf{x}(t),\ p^0(t),\ \mathbf{p}(t))_{t\geq 0}.$$

- Dans la suite, on posera $\mathbf{p} := r \times \Theta$ avec

$$r := |\mathbf{p}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |p^i|^2} \quad \text{et} \quad \Theta = (\theta^1, \ldots, \theta^d) = \frac{\mathbf{p}}{r}.$$

Deux principaux exemples

- Le “Processus d'Orstein-Uhlenbeck Relativiste" (ROUP) :

$$\begin{cases} dx_t^i = \frac{p_t^i}{\sqrt{1+r_t^2}}\, dt \\ \\ dp_t^i = -\frac{p_t^i}{\sqrt{1+r_t^2}}\, dt + \sigma\, dW_t^i \end{cases}$$

(Debbasch, Mallick, Rivet, 1990')

- Le “Mouvement Brownien Relativiste" :

$$\begin{cases} dx_t^i = \frac{p_t^i}{\sqrt{1+r_t^2}}\, dt \\ \\ dp_t^i = -\, p_t^i\, dt + \frac{\sigma}{(1+r_t^2)^{1/4}} \left[dW_t^i + r_t \theta_t^i dw_t \right] \end{cases}$$

(Dunkel, Hänggi, 2000')

Deux principaux exemples

- Le “Processus d'Orstein-Uhlenbeck Relativiste" (ROUP) :

$$\begin{cases} dx_t^i = \frac{p_t^i}{\sqrt{1+r_t^2}}\, dt \\ \\ dp_t^i = -\frac{p_t^i}{\sqrt{1+r_t^2}}\, dt + \sigma\, dW_t^i \end{cases}$$

(Debbasch, Mallick, Rivet, 1990')

- Le “Mouvement Brownien Relativiste" :

$$\begin{cases} dx_t^i = \frac{p_t^i}{\sqrt{1+r_t^2}}\, dt \\ \\ dp_t^i = -\, p_t^i\, dt + \frac{\sigma}{(1+r_t^2)^{1/4}} \left[dW_t^i + r_t \theta_t^i dw_t \right] \end{cases}$$

(Dunkel, Hänggi, 2000')

Problématique

- L'écart quadratique moyen converge-t-il de nouveau ?

$$\mathbb{E}\left[\frac{|\mathbf{x}|^2(t)}{t}\right] \xrightarrow{?} \Sigma^2(\sigma).$$

Si oui, qui est $\Sigma^2(\sigma)$? Allure de la fonction $\sigma \mapsto \Sigma(\sigma)$?

- Le processus rééchelonné est-il encore asymptotiquement brownien ?

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{x}_{at}\right)_{a\geq 0} \xrightarrow{?} \Sigma(\sigma) \times (\mathcal{B}_a)_{a\geq 0}.$$

Problématique

- L'écart quadratique moyen converge-t-il de nouveau ?

$$\mathbb{E}\left[\frac{|\mathbf{x}|^2(t)}{t}\right] \xrightarrow{?} \Sigma^2(\sigma).$$

Si oui, qui est $\Sigma^2(\sigma)$? Allure de la fonction $\sigma \mapsto \Sigma(\sigma)$?

- Le processus rééchelonné est-il encore asymptotiquement brownien ?

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathbf{x}_{at}\right)_{a\geq 0} \xrightarrow{?} \Sigma(\sigma) \times (\mathcal{B}_a)_{a\geq 0}.$$

Enoncé de nos résultats

Une classe de diffusions

On considère des diffusions

$$(t,\ \mathbf{x}_t,\ p_t^0,\ \mathbf{p}_t)_{t\geq 0} \in \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}_d$$

où $(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$ est solution d'un système d'éds du type :

$$\begin{cases} dx_t^i = f(r_t)\, p_t^i\, dt \\ \\ dp_t^i = -\,b(r_t)\, p_t^i\, dt + \dfrac{\sigma(r_t)}{\sqrt{1+\eta^2(r_t)}}\left[dW_t^i + \eta(r_t)\, \theta_t^i\, dw_t\right] \end{cases}$$

où $\mathbf{W} := (W^1, \ldots, W^d)$ est un mouvement brownien standard de dimension d et w est un mouvement brownien réel indépendant de $\mathbf{W}$.

Hypothèses sur les paramètres de la diffusion

Hypothèses $(\mathcal{H})$

- *Les fonctions f, b, σ, η sont continues.*

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que

- $\sigma \geq \varepsilon$ *sur* $\mathbb{R}^+$ *tout entier,*
- $g(r) := \dfrac{2r\,b(r)}{\sigma^2(r)} \geq \varepsilon$ *pour r assez grand,* $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$,
- $\lim_{r\to\infty} e^{-\varepsilon' r} f(r) = 0$, *pour un* $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$.

Enoncé du théorème principal

Théorème principal

Soit $(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{p}_t)$ *une diffusion solution du système d'équations*

$$\begin{cases} dx_t^i = p_t^i \times f(r_t)\, dt \\ \\ dp_t^i = -p_t^i \times b(r_t)\, dt + \frac{\sigma(r_t)}{\sqrt{1+\eta^2(r_t)}}[dW_t^i + \eta(r_t)\, \theta_t^i\, dw_t] \end{cases}$$

Sous les hypothèses $(\mathcal{H})$, *il existe une constante positive* Σ_∞ *telle que, lorsque* t *tend vers l'infini,*

$$\left(t^{-1/2}\mathbf{x}_{at}\right)_{a\geq 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} (\Sigma_\infty \times \mathcal{B}_a)_{a\geq 0}\,,$$

où $(\mathcal{B}_a)_{a\geq 0}$ *est un MB standard de dimension* d.

Conséquence sur l'écart quadratique moyen

Corollaire : convergence de l'écart quadratique moyen

Sous les hypothèses $(\mathcal{H})$, pour tout point initial, lorsque t tend vers l'infini, on a la convergence en loi :

$$t^{-1}\,|\mathbf{x}_t|^2 \longrightarrow \Sigma_\infty^2 \times U,$$

où U suit une loi du chi 2 à d degrés de liberté. De plus, pour tout point initial, on a la convergence des espérances :

$$\mathbb{E}\left[\frac{|\mathbf{x}|^2(t)}{t}\right] \longrightarrow d \times \Sigma_\infty^2.$$

Retour aux exemples : expression de la limite

- Dans le cas du ROUP la limite est la même que dans le cas euclidien :

$$\mathbb{E}\left[\frac{|\mathbf{x}|^2(t)}{t}\right] \longrightarrow d \times \sigma^2.$$

- Dans le cas de la diffusion de Dunkel et Hänggi, à partir de simulations numériques, les auteurs ont conjecturé l'expression suivante pour la limite :

$$\Sigma^2_\infty(\sigma) \stackrel{?}{=} \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}.$$

Retour aux exemples : expression de la limite

- Dans le cas du ROUP la limite est la même que dans le cas euclidien :

$$\mathbb{E}\left[\frac{|\mathbf{x}|^2(t)}{t}\right] \longrightarrow d \times \sigma^2.$$

- Dans le cas de la diffusion de Dunkel et Hänggi, à partir de simulations numériques, les auteurs ont conjecturé l'expression suivante pour la limite :

$$\Sigma^2_\infty(\sigma) \stackrel{?}{=} \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}.$$

Pour les trois méthodes d'intégration, lorsque $\sigma \to 0$:

$$\Sigma_\infty^2(\sigma) \sim \sigma^2.$$

Lorsque $\sigma \to +\infty$, il existe des constantes explicites $A > 0$ et $C > 0$ telles qu'on ait

Itô	Stratonovich	backward
$\Sigma_\infty^2(\sigma) \sim \dfrac{A}{\log(\sigma^2)}$	$\Sigma_\infty^2(\sigma) \longrightarrow C$	$\Sigma_\infty^2(\sigma) \sim 2\log(\sigma^2)$

Esquisse de la preuve

Ergodicité du processus $(\mathbf{p}_t)$

- Le processus $(\mathbf{p}_t)$ est ergodique dans $\mathbb{R}^d$, de probabilité invariante π.
- Le processus rééchelonné est de la forme

$$\left(t^{-1/2}\mathbf{x}_{at}\right)_{a\geq 0} = \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{at} h(\mathbf{p}_s)ds\right)_{a\geq 0}.$$

On étudie une fonctionnelle additive d'une diffusion ergodique.

Ergodicité du processus $(\mathbf{p}_t)$

- Le processus $(\mathbf{p}_t)$ est ergodique dans $\mathbb{R}^d$, de probabilité invariante π.

- Le processus rééchelonné est de la forme

$$\left(t^{-1/2}\mathbf{x}_{at}\right)_{a\geq 0} = \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{at} h(\mathbf{p}_s)ds\right)_{a\geq 0}.$$

On étudie une fonctionnelle additive d'une diffusion ergodique.

Méthode des martingales

- Soit L le générateur infinitésimal du processus $(\mathbf{p}_t)$. S'il existe $g = (g^1, \dots, g^d) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d, \pi)$ telle que $Lg = h$, alors le processus

$$\mathbf{M}_t = (M_t^1, \dots, M_t^d) := g(\mathbf{p}_t) - g(\mathbf{p}_0) - \int_0^t h(\mathbf{p}_s) ds$$

est une martingale pour toute loi d'entrée.

- Uniformément par rapport à a dans un compact

$$\frac{1}{\sqrt{t}} |g(\mathbf{p}_{at}) - g(\mathbf{p}_0)| = o_{\mathbb{L}^2}(1).$$

Méthode des martingales

- Soit L le générateur infinitésimal du processus $(\mathbf{p}_t)$. S'il existe $g = (g^1, \dots, g^d) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d, \pi)$ telle que $Lg = h$, alors le processus

$$\mathbf{M}_t = (M_t^1, \dots, M_t^d) := g(\mathbf{p}_t) - g(\mathbf{p}_0) - \int_0^t h(\mathbf{p}_s) ds$$

est une martingale pour toute loi d'entrée.

- Uniformément par rapport à a dans un compact

$$\frac{1}{\sqrt{t}} |g(\mathbf{p}_{at}) - g(\mathbf{p}_0)| = o_{\mathbb{L}^2}(1).$$

Etude de la martingale

- Les crochets de $\mathbf{M}$ sont donnés par

$$\langle M^i,\, M^j \rangle_t = \int_0^t \Gamma(g^i, g^j)(\mathbf{p}_s)ds,$$

où $\Gamma(g,h) = L(gh) - gLh - hLg$.

- D'après le théorème ergodique, on a alors

$$\frac{1}{t}\langle M^i,\, M^j \rangle_t \overset{p.s.\ \mathbb{L}^1}{\longrightarrow} \delta_{i,j} \times \int \Gamma(g^i, g^i)d\pi.$$

Etude de la martingale

- Les crochets de $\mathbf{M}$ sont donnés par

$$\langle M^i,\, M^j \rangle_t = \int_0^t \Gamma(g^i, g^j)(\mathbf{p}_s)ds,$$

où $\Gamma(g,h) = L(gh) - gLh - hLg$.

- D'après le théorème ergodique, on a alors

$$\frac{1}{t}\,\langle M^i,\, M^j \rangle_t \stackrel{p.s.\ \mathbb{L}^1}{\longrightarrow} \delta_{i,j} \times \int \Gamma(g^i, g^i)d\pi.$$

Fin de la preuve

$$\left.\begin{array}{c}\text{Théorème de Knight}\\ \text{asymptotique}\\ +\\ \text{Théorème de couplage}\\ \text{de Skorokhod}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{Le processus } (t^{-1/2}\mathbf{M}_{at})_{a\geq 0}\\ \text{converge au sens}\\ \text{des marginales}\\ \text{de dimension finie}\end{array}$$

On vérifie un critère de tension pour conclure.

Existence de $g \in \mathbb{L}^2$ telle que $Lg = h$?

- Si la résolvante associée à L est quasi-compacte, alors $\forall\ h \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d, \pi)$ tq $\pi(h) = 0,\ \exists\ g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d, \pi),\ \ Lg = h$.
- Ici, $Lg = h$ se ramène à une équation différentielle d'ordre 2, de dimension 1, avec des pôles d'ordre 2 en 0 et en $+\infty$.
- Existence de la solution : méthode de point fixe,
  Etude de la régularité : “à la main".

- Article publié au Journal of Mathematical Physics :
  J. Math. Phys. 48, 083101 (2007)

- Consultation libre sur :
  arXiv :math/0702481v2 [math.PR]