Séminaire des doctorants

IRMA, Université Louis Pasteur

Jürgen Angst

10 novembre 2005

Jamais sans mon Brownien

ou une introduction sans prétention au Mouvement Brownien

1. **Un (tout petit) peu de proba**
2. **Des grains de pollen énervés**
3. **Marches aléatoires et Mouvement Brownien**
4. **Sur les trajectoires Browniennes**
5. **Les équations différentielles stochastiques**
6. **Don Diego de la Vega**
7. **Avoir un Brownien chez soi**

1. Un (tout petit) peu de proba

▶ Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où Ω est un ensemble, $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$

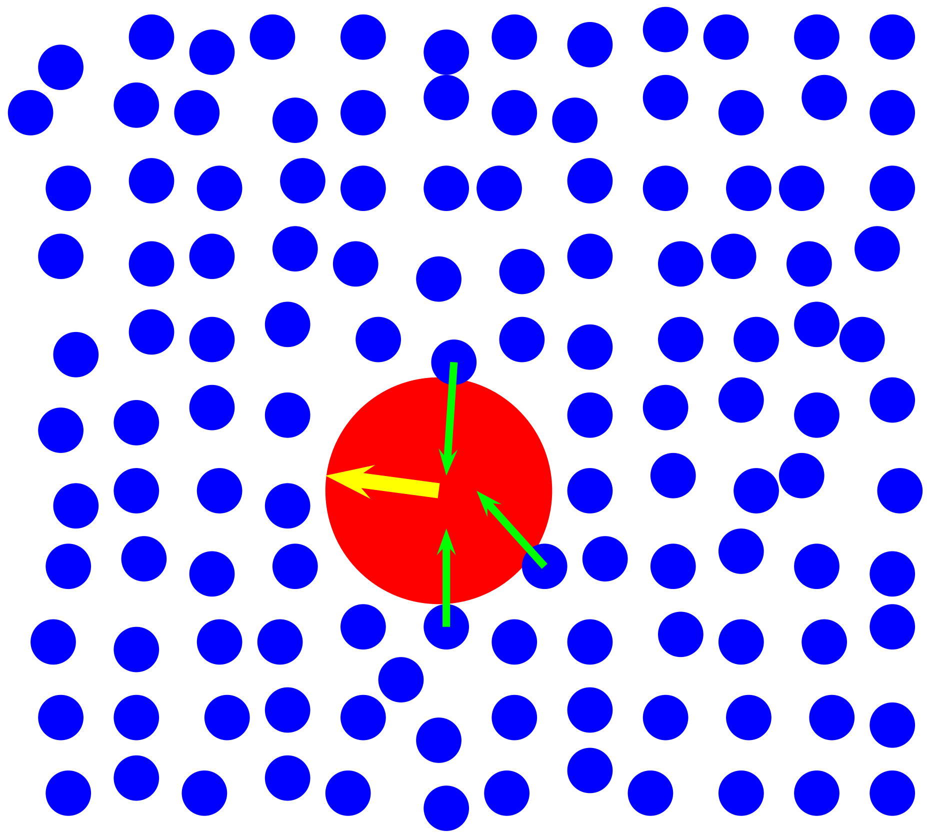
▶ Si $(E, \mathcal{E})$ est un espace mesurable, une variable aléatoire (ou $v.a$), $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$ est simplement une application mesurable.

▶ X définit une mesure $\mathbb{P}_X$ sur $(E, \mathcal{E})$ via $\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X^{-1}(A))$.
La mesure $\mathbb{P}_X$ est appelée la loi de X.

▶ Si on considère un couple de variables aléatoires $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E^2, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$, on dit que X et Y sont indépendantes si $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$

▶ Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $v.a$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, on dit que X_n converge vers une $v.a$ X si $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$ pour toute f fonction continue bornée, où $\mathbb{E}(f(Y)) = \int_E f(y) \mathbb{P}_Y(dy)$

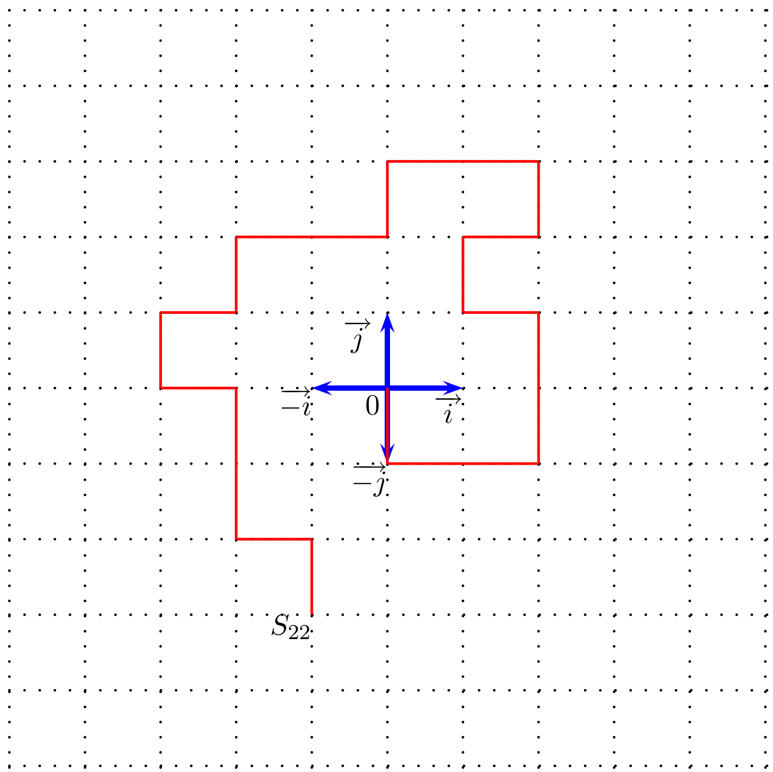
2. Des grains de pollen énervés



La taille du grain de pollen (en rouge) est grande devant celle des molécules d'eau (bleu), ces dernières, du fait de l'agitation thermique viennent percuter le grain lui conférant ainsi un mouvement global (jaune)

3. Marches aléatoires et Mouvement brownien

Sur $\mathbb{Z}^2$, on considère une suite (X_k) de variables aléatoires indépendantes dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X_k = \pm\overrightarrow{i}) = \mathbb{P}(X_k = \pm\overrightarrow{j}) = \frac{1}{4}$.



On forme $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, une trajectoire de S_n est tracée ci dessus.

Plus généralement, sur $\mathbb{Z}^d$, on peut se donner une suite (X_k) de variables aléatoires indépendantes de loi μ. On fait les hypothèses suivantes :

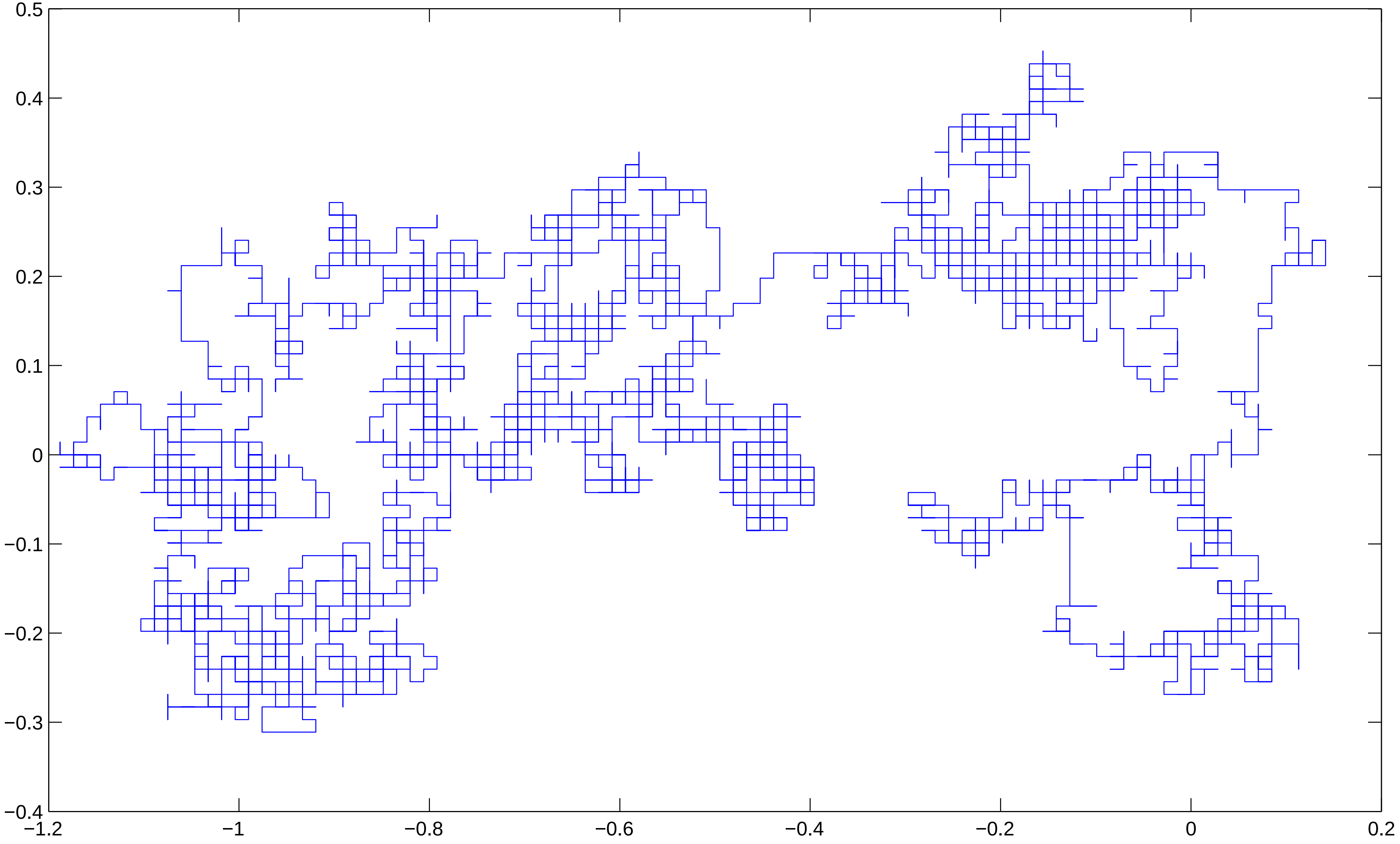
Moment d'ordre 2 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |k|^2\mu(k) < \infty$

Centrage $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} k\mu(k) = 0$

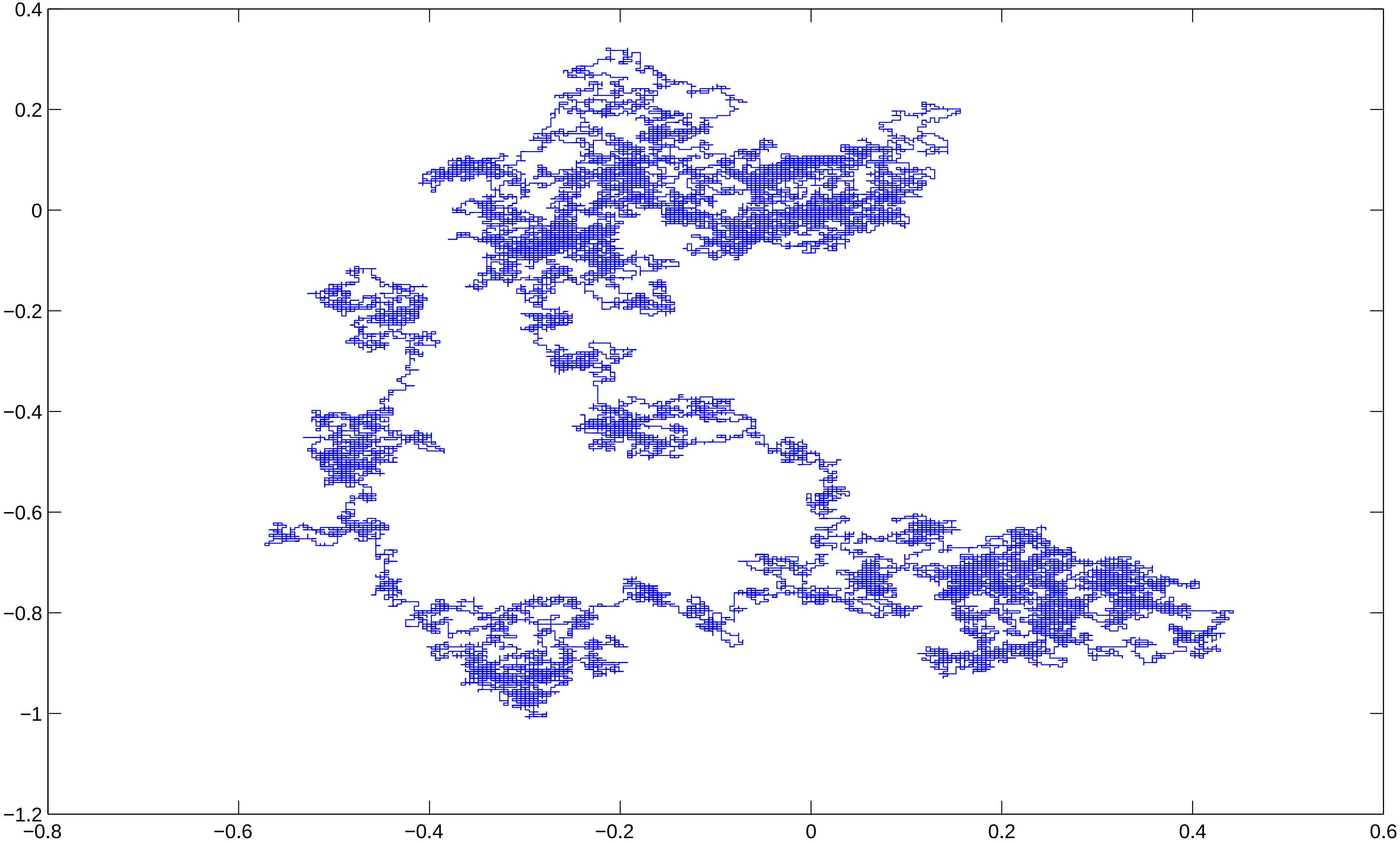
Isotropie $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} k_i k_j \mu(k) = \sigma\delta_{ij}$

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et on fait le changement d'échelle

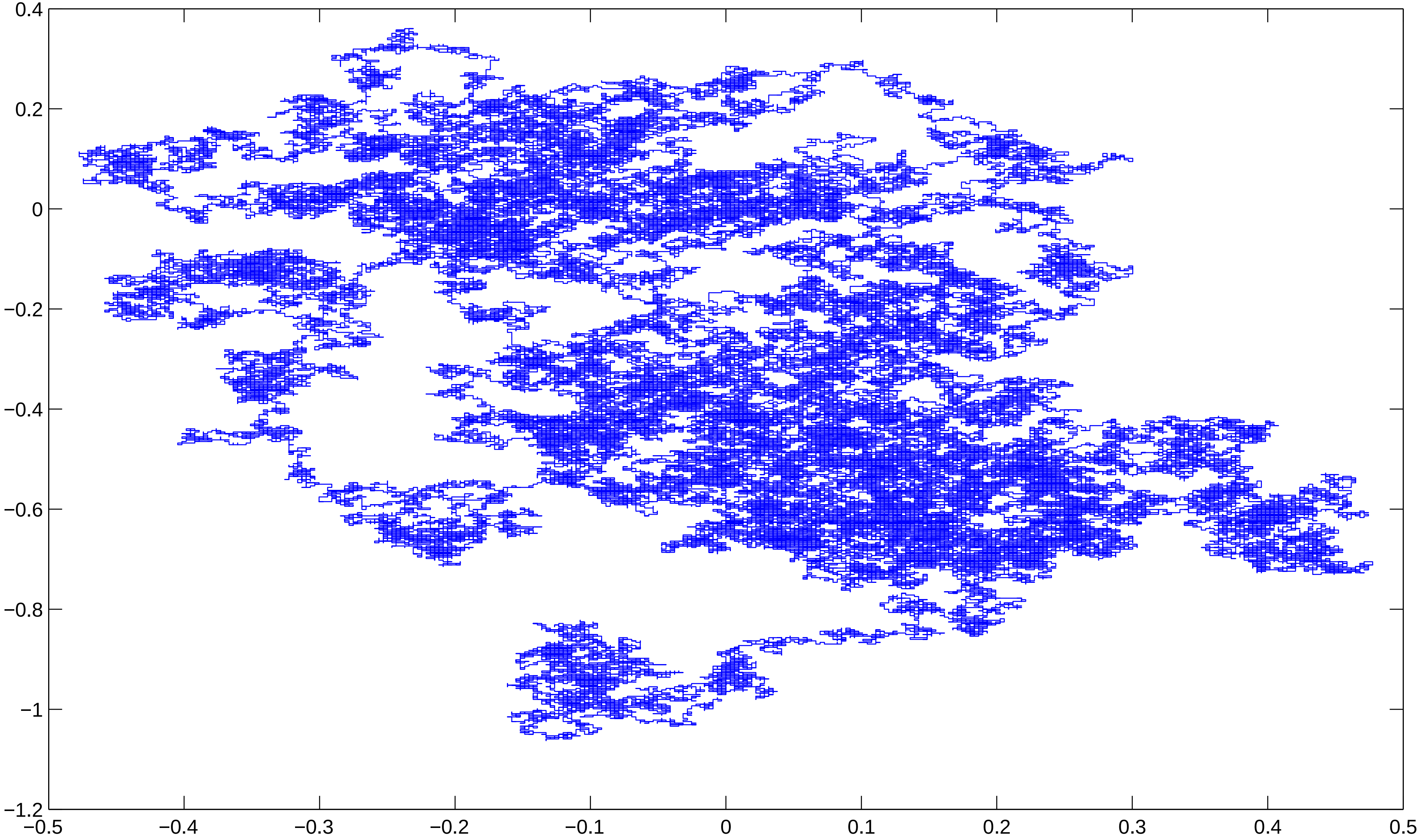
$$S_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}$$



$$t = 2, \qquad n = 5000$$



$$t = 2, \qquad n = 50000$$



$$t = 2, \qquad n = 100000$$

Théoreme 1 *(Donsker)*
Pour tout choix de l'entier $p \geq 1$ *et pour tout choix de nombres réels* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p$*, on a*

$$(S_{t_1}^{(n)}, S_{t_2}^{(n)}, ..., S_{t_p}^{(n)}) \xrightarrow{loi} (U_1, U_2, ..., U_p)$$

où

- *les v.a* $U_1, U_2 - U_1 , ..., U_p - U_{p-1}$ *sont indépendantes*
- *les vecteurs* $U_j - U_{j-1}$ *sont des vecteurs gaussiens centrés de matrice de covariance* $\sigma^2(t_j - t_{j-1})Id$

Définition 1 *(Mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^d$, issu de 0)*
On appelle mouvement brownien une famille $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définies sur un espace $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ tq:

- *(P1) $B_0 = 0$ ps et $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad 0 = t_0 < ... < t_p$, les variables $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}$,... , $B_{t_p} - B_{t_{p-1}}$ sont indépendantes, gaussiennes, centrées de matrice de covariance $(t_j - t_{j-1})Id$.*

- *(P2) Pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \to B_t(\omega)$ est continue.*

En admettant l'existence du mouvement brownien, le théorème ci-dessus affirme que $\forall p \geq 1, \quad 0 = t_0 < ... < t_p$

$$(S_{t_1}^{(n)}, S_{t_2}^{(n)}, ... , S_{t_p}^{(n)}) \xrightarrow{loi} \sigma(B_{t_1}, B_{t_2}, ... , B_{t_p})$$

4. Sur les trajectoires browniennes

Théoreme 2 *(Invariance d'échelle, retournement du temps)*
Soit $c > 0$, *si* $(B_t)_{t \geq 0}$ *est un mouvement brownien, alors*

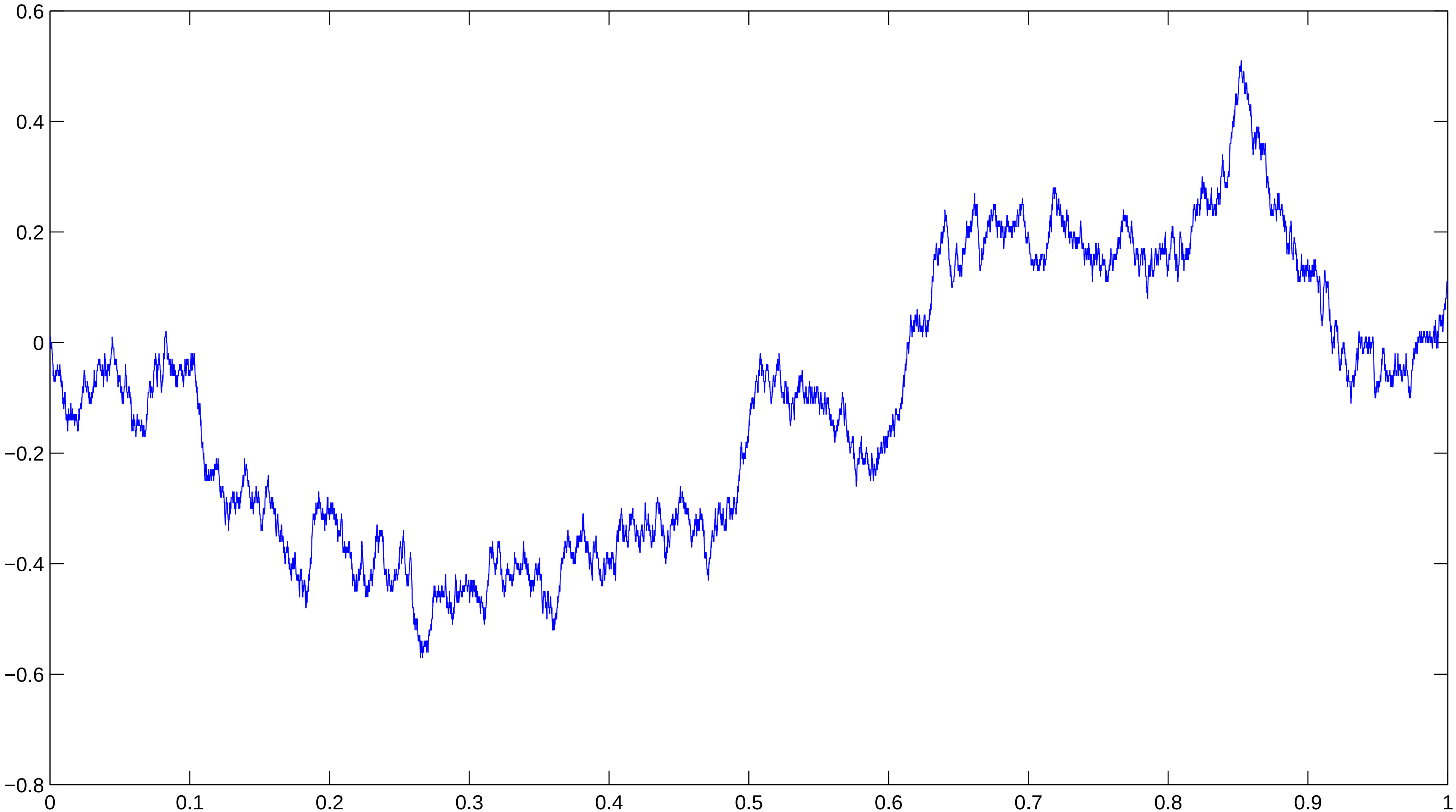
$$\frac{1}{\sqrt{c}}(B_{ct})_{t\geq 0} \qquad \text{et} \qquad (t\, B_{\frac{1}{t}})_{t\geq 0}$$

sont aussi des mouvements browniens.

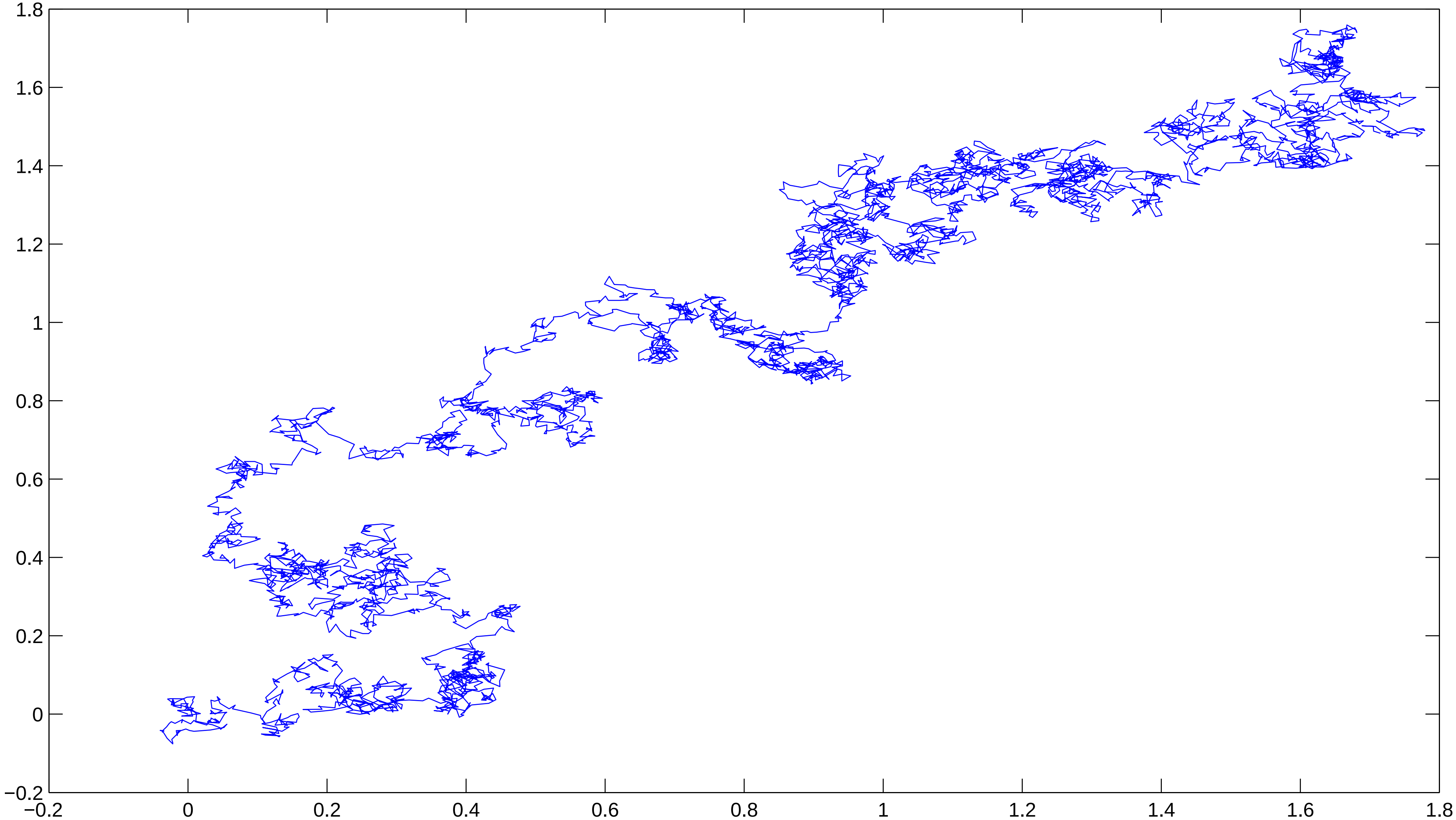
Théoreme 3 *(Régularité des trajectoires, Lévy)*
• *Presque sûrement, les trajectoires browniennes sont localement höldériennes d'ordre* α *pour* $\alpha < 1/2$ *et nulle part localement hölderiennes d'ordre* β *pour* $\beta > 1/2$.

• *En fait, si* $h(t) = \sqrt{2t \log 1/t}$, *on a*

$$\mathbb{P}\left[\overline{\lim_{\epsilon \longrightarrow 0}} \left(\sup_{0 \leq t_2 - t_1 \leq \epsilon} |B_{t_2} - B_{t_1}|/h(\epsilon) \right) = 1 \right] = 1$$



Mouvement brownien sur [0,1]: une fonction continue générique sur [0,1]



Une trajectoire brownienne: un chemin générique

5. Les équations différentielles stochastiques

On part d'une équation différentielle classique sur $\mathbb{R}$ du type:

$$\frac{dX_t}{dt} = b(X_t) \qquad \text{que l'on peut aussi écrire} \qquad dX_t = b(X_t)dt$$

On perturbe (”bruite”) alors l'équation en introduisant, à chaque instant un ”petit” aléa brownien, on obtient une équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

ce qui signifie que si h est infiniment petit

$$X_{t+h} - X_t = b(X_t) \times h + \sigma(X_t)\left[B_{t+h} - B_t\right]$$

où encore

$$X_{t+h} - X_t = b(X_t) \times h + \sigma(X_t) \times \mathcal{N}(0,h)$$

• Il existe un théorème (analogue au théorème de Cauchy Lipschitz) qui affirme que si b et σ sont Lipschitziennes et si l'on se donne des conditions initiales, alors l'équation

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

admet une solution, unique en un certain sens.

• A l'équation ci-dessus, on peut associer un opérateur différentiel:

$$A(f)(x) = b(x)\partial_x f + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\,\partial_x^2 f(x)$$

et son opérateur dual

$$A^*(f)(x) = \partial_x(b(x)f) + \frac{1}{2}\partial_x^2(\sigma^2(x)f(x))$$

L'opérateur A est appelé le générateur infinitésimal de (X_t)

• Si $(X_s)_{s\geq 0}$ est solution, on note π_t la loi sur $\mathbb{R}$ de X_t. Si π_t admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, on note $\pi_t = \pi_t(x)dx$

Théoreme 4 *(Equation de Kolmogorov forward)*
On a équivalence entre

$$(X_t)_{t\geq 0} \quad \textit{est solution de} \quad dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

et

$$\pi_t \quad \textit{est solution de} \quad \partial_t \pi_t = A^* \pi_t$$

En particulier, pour $b \equiv 0$ et $\sigma \equiv 1$, on trouve que si π_t est la loi du processus $(B_s)_{s\geq 0}$ à l'instant t alors π_t vérifie l'équation

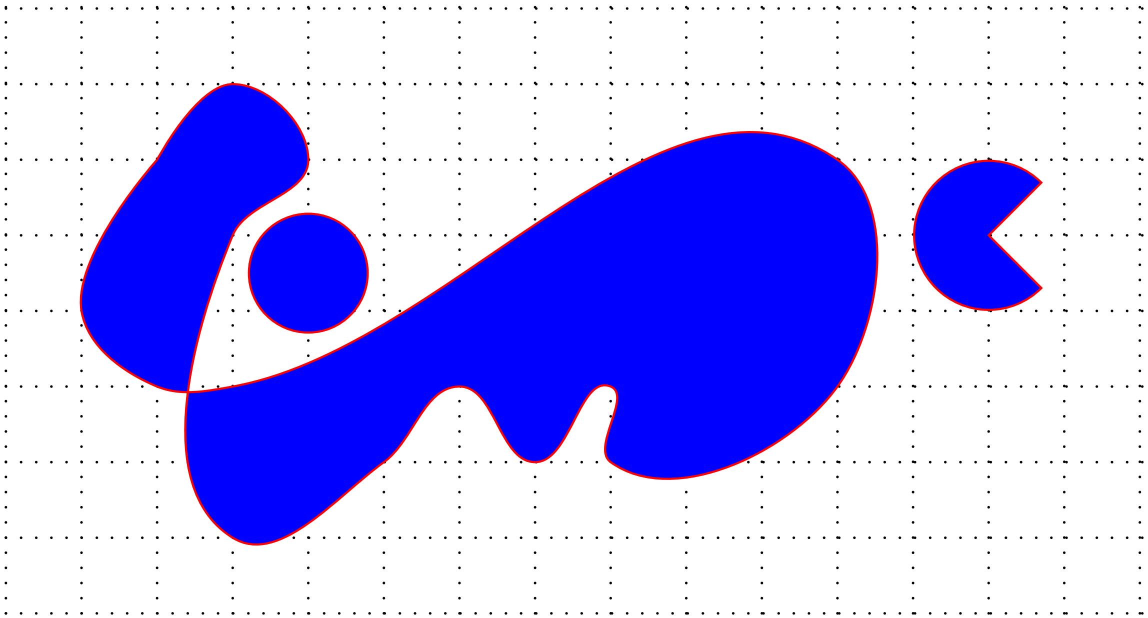
$$\partial_t \pi_t = \frac{1}{2} \Delta \, \pi_t$$

$i.e$ π_t est solution de l'équation de la chaleur.

6. Don Diego de la Vega

ou quand le mouvement brownien surgit de la nuit

Le problème de Dirichlet:



Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, et $f\ : \partial D \to \mathbb{R}$ continue, le problème de Dirichlet est de trouver une fonction u telle que:

$$\begin{cases} u \in C^2(D), \quad \text{et} \quad u \in C^0(\overline{D}) \\ \Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad D, \qquad \text{et} \quad u_{|\partial D} = f \end{cases}$$

Points réguliers:

Si $D^c = \mathbb{R}^d - D$, et $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement brownien, on pose

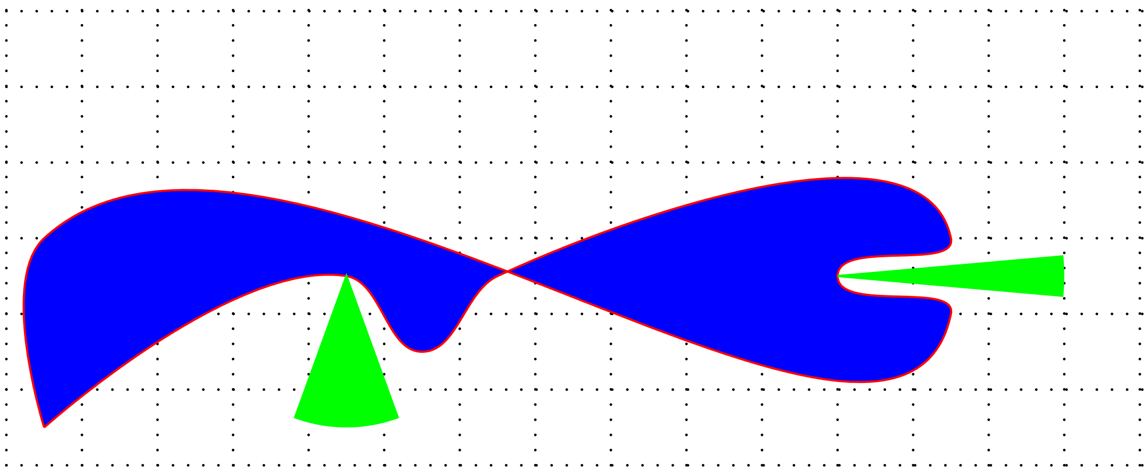
$$T_{D^c} = \inf\{t \geq 0,\, B_t \in D^c\} \qquad T^+_{D^c} = \inf\{t > 0,\, B_t \in D^c\}$$

Soit $x \in \partial D$, on dit que le point x est régulier pour D^c si

$$\mathbb{P}_x(T^+_{D^c} = 0) = 1$$

Condition de régularité:

Une condition suffisante pour qu'un point $x \in \partial A$ soit régulier pour A est que l'on puisse placer un cône comme suit:



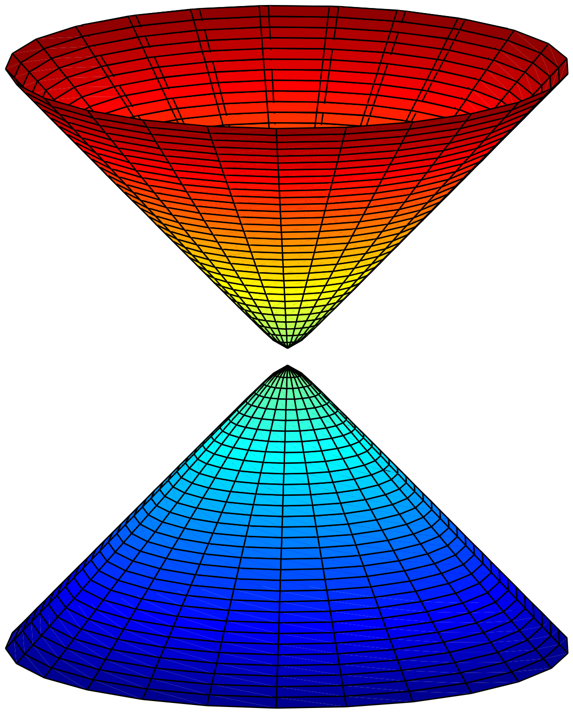
Théoreme 5 *(Problème de Dirichlet, Kakutani, Doob)*
Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et $f\ :\partial D \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que tous les points de la frontière sont réguliers. Alors le problème de Dirichlet admet une solution bornée u définie par

$$u(x) = \mathbb{E}\left(f(x + B_{T_D^c})1_{T_D^c<\infty}\right)$$

De plus, si D est connexe et $\overline{D}$ est compact, la solution est unique.

7. Avoir un brownien chez soi

Construction d'un mouvement brownien sur l'hyperboloïde



On se place dans $\mathbb{R}_+^{1,d}$*, muni des coordonnées* $(S,X) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ *et on considère la partie positive de la pseudo-sphère*

$$\mathbb{H} := \left\{ S = \sqrt{|X|^2 + 1} \right\}$$

pour la pseudo métrique de Minkowski.

On paramétrise $\mathbb{H}$ *par les coordonnées hyperboliques:*

$$(\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1}, \qquad S = \cosh(\rho) \quad et \quad X = \theta \sinh(\rho)$$

Dans cette carte, le Laplacien hyperbolique s'écrit:

$$\Delta^{\mathbb{H}} := \partial_\rho^2 + (d-1)\coth(\rho)\partial_\rho + \sinh^{-2}(\rho)\Delta_\theta$$

où Δ_θ *désigne le Laplacien sur* $\mathbb{S}^{d-1}$.

On considère (Θ_s) *un mouvement brownien sur* $\mathbb{S}^{d-1}$ *et* (w_s) *mouvement brownien réel, indépendant de* (Θ_s) *de coefficient de diffusion* σ*, et on se donne l'EDS suivante*

$$\begin{cases} d\rho_s = \sigma dw_s + \frac{d-1}{2}\sigma^2\coth(\rho_s)ds \\ \\ d\theta_s = \sigma \sinh^{-1}(\rho_s)d\Theta_s \end{cases}$$

Le générateur associé à ce système est

$$L(\centerdot) = \frac{\sigma^2}{2}\partial_\rho + \frac{(d-1)\sigma^2}{2}\cosh(\rho)\partial_\rho + \frac{\sigma^2}{2}\sinh^{-2}(\rho)\Delta_\theta$$

$$i.e \quad L = \frac{\sigma^2}{2}\Delta^{\mathbb{H}}$$

Aussi, si on donne une solution (ρ_s,θ_s) *du système*

$$\begin{cases} d\rho_s = \sigma dw_s + \frac{d-1}{2}\sigma^2 \coth(\rho_s) ds \\ \\ d\theta_s = \sigma \sinh^{-1}(\rho_s) d\Theta_s \end{cases}$$

Alors,le mouvement brownien hyperbolique de générateur $\frac{1}{2}\sigma^2\Delta^{\mathbb{H}}$ *peut être obtenu comme*

$$(B_s)_{s\geq 0} = (\cosh(\rho_s),\theta_s \sinh(\rho_s))_{s\geq 0}$$